Démontrer une inégalité

1. Principes généraux

On est dans cette situation quand la question est sous la forme :
Montrer que, pour tout x de l'intervalle I, $a \leq f(x) \leq b$
Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_n \leq b_n$.
Etudier le sens de variation de la suite (u_n)
Montrer que, pour tout x de l'intervalle I, $f(x) \leq g(x)$
Montrer que, pour tout entier n, $a \leq u_n \leq b$
Donner un encadrement de $f(a)$
Etc.

Dans tous les cas, il est important de bien comprendre qu'on est en train de prouver un résultat et non de chercher à résoudre une inéquation. Autrement dit, seule la conclusion compte, il n'est absolument pas nécessaire d'employer des équivalences. Celles-ci peuvent même être néfastes, car dans certains cas il n'y a pas équivalence. Il vaut donc mieux en général utiliser « donc » ou « si … alors ».

2. Méthodes diverses

a) La méthode la plus élémentaire :

On part de l'encadrement de x, et on essaie d'obtenir l'encadrement désiré avec les règles usuelles. Attention on ne peut pas diviser des inégalités, il faut inverser puis multiplier, et il faut que tous les termes soient positifs. D'autre part, dans cette situation, chaque fois qu'on applique une fonction à une inégalité, ça doit être justifié par un sens de variation sur l'intervalle considéré.

Exemples : Donner un encadrement de $\dfrac{1+\ln x}{2+e^{-x}}$ sur $[1\,;2]$.

Sachant que $0,47 \leq a \leq 0,48$, encadrer $a^2+\sqrt{a}$

b) Etudier un signe

Pour montrer une inégalité, on fait la différence entre les termes et on montre que cette différence est positive (ou négative).

Exemple : Si x et y sont deux réels strictement positifs avec $x<y$, leur moyenne arithmétique est $a=\dfrac{x+y}{2}$, leur moyenne harmonique est $h=\dfrac{2xy}{x+y}$, leur moyenne géométrique est $g=\sqrt{xy}$, leur moyenne quadratique est $q=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$. Montrer que $x \leq h \leq g \leq a \leq q \leq y$.

c) Etudier des variations

Pour encadrer une fonction f sur l'intervalle I, on étudie les variations de f sur cet intervalle, et on en déduit la valeur du minimum et du maximum.

On a un cas particulier : pour montrer une inégalité, on fait la différence entre les termes et on étudie les variations de cette différence.

Exemples : Montrer que, pour tout réel positif x, $0 \leq \dfrac{x}{e^x} \leq \dfrac{1}{e}$

Montrer que, pour tout réel x, $1+x \leq e^x$

Montrer que, pour tout réel $x > -1$, $\ln(x+1) \leq x$

d) Par récurrence.

Bien évidemment, s'il y a récurrence c'est que l'étude porte sur des entiers. Comme toujours, initialisation et hérédité sont les deux mamelles de la récurrence.

Exemples : Montrer que, pour tout entier naturel n, $n^2 \leq 2^{n+1}$

Montrer que, pour tout entier naturel n, $\frac{2^n}{n!} \leq 2$

e) Avec des intégrales

Ici, le principe de base est d'employer l'inégalité de la moyenne, ou la positivité de l'intégrale. On montre que, pour tout x de $[a ; b]$, la fonction à intégrer est encadrée (par deux constantes ou par deux fonctions plus simples), puis on intègre l'inégalité obtenue.

Exemples : Montrer que $\frac{1}{\ln 3} \leq \int_2^3 \frac{dx}{\ln x} \leq \frac{1}{\ln 2}$

Montrer que, pour tout entier naturel n, $\int_0^1 \frac{x^n}{1+e^x} dx \leq \frac{1}{n+1}$