Fiche technique : intégrales

1. Calculer une intégrale.

La difficulté principale est une intégrale comportant des produits ou des quotients. Dans ce cas, il y a deux techniques principales : les composées et l'intégration par parties.

Les composées : elles se basent sur la propriété suivante : si $f(x)$ a pour primitive $F(x)$, alors $f(ax+b)$ a pour primitive $\frac{1}{a}F(ax+b)$ et $u'(x)f\left[u(x)\right]$ a pour primitive $F\left[u(x)\right]$.

Ainsi : x^7 a pour primitive $\frac{1}{8}x^8$ donc $(5x+3)^7$ a pour primitive $\frac{1}{5}\times\frac{1}{8}\times(5x+3)^8$ et $\cos(x)\times\sin^7(x)$ a pour primitive $\frac{1}{8}\sin^8 x$ (ici $f(x)=x^7$ et $u(x)=\sin(x)$). Pour appliquer ce procédé, il faut reconnaître une nouvelle variable ($u(x)$) et sa dérivée. La dérivée doit être en facteur multiplicatif. Sont de cette nature les primitives suivantes :

$$\sin x e^{\cos x},\ \frac{1}{x\ln x}\left(=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right),\ \frac{2x+1}{(x^2+x+3)^5},\ \frac{e^x+1}{e^x+x},\ \frac{\cos(\ln x)}{x},\ \ldots$$

Sont sous cette forme à constante multiplicative près les primitives suivantes :

$$\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}},\ x\cos(x^2+1),\ \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}},\ \sin(2x)\cos(2x),\ \tan x,\ \ldots$$

Les intégrations par parties : Elles utilisent la formule $\int_a^b u'v=\left[uv\right]_a^b-\int_a^b uv'$. Pour les appliquer, il faut avoir un produit (ou un quotient) dans lequel on connaît une primitive d'un des facteurs. Quand on fait une intégration par parties, par ordre de priorité :

On dérive les logarithmes

On dérive les puissances

Se calculent ainsi :

$$\int_1^2 x^3\ln x dx,\ \int_0^1 xe^{2x}dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2x)e^x dx,\ \ldots$$

2. Encadrer, majorer.

On utilise essentiellement les trois propriétés suivantes ;

Positivité de l'intégrale :

Si **pour tout *x* de [*a* ; *b*]** $f(x)\geq 0$ (et si $a \leqslant b$), alors $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

Inégalité de la moyenne :

Si **pour tout *x* de [*a* ; *b*]** $m\leq f(x)\leq M$ (et si $a \leqslant b$), alors $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$

La moyenne de *f* sur [*a* ; *b*] est le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Comparaison d'intégrales :

Si **pour tout *x* de [*a* ; *b*]** $f(x) \leq g(x)$ (et si $a \leqslant b$), alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Exemple : montrer que $0 \leq \int_0^1 \frac{dx}{x+e^x} \leq 1$

Attention : ces trois théorèmes sont en si…alors, il ne faut absolument pas employer d'équivalences quand on les utilise.

3. Suites d'intégrales.

Il y a deux possibilités : soit on intègre sur un intervalle variable, par exemple $I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{1+\ln x} dx$, soit on intègre une fonction variable, par exemple $J_n = \int_0^1 x^n e^x dx$. Dans tous les cas, il faut bien distinguer ce qui se passe pour la variable *x* et ce qui se passe pour la variable *n*. En règle générale, on ne cherche pas à calculer les intégrales, mais on utilise les propriétés de l'intégrale pour étudier le sens de variation ou la limite de la suite. On peut parfois avoir recours à une intégration par parties pour obtenir une formule de récurrence.

Pour les suites précédentes :

Montrer que, pour tout entier *n*, $\frac{1}{1+\ln(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{1+\ln(n)}$, en déduire le sens de variation et la limite de (I_n)

Etudier le sens de variation de (J_n).

Montrer que pour tout entier *n*, $\frac{1}{n+1} \leq J_n \leq \frac{e}{n+1}$, en déduire la limite de (J_n)

4. Fonctions définies par une intégrale

Le théorème fondamental : la fonction *F* définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de la fonction *f* qui s'annule en *a*. Quand une fonction est définie par une intégrale, on peut étudier ses variations sans calculer l'intégrale. De nouveau, il y a deux, variables, *x* et *t*, il faut faire très attention. Par exemple :

Posons $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{e^t - t}$.

On peut remarquer que, que, quel que soit le réel *t*, $e^t \geq t+1$ (on montre ce résultat en étudiant la fonction $g(t) = e^t - t - 1$), donc $e^t - t$ ne s'annule jamais et *F* est définie sur ℝ.

Quelle est la dérivée de *F* ?

Quelles sont les variations de *F* ?

Quel est le signe de *F* ?

Pour $x < 0$, on ne peut pas utiliser les théorèmes de comparaison directement (c'est le problème des bornes), donc on écrit $F(x) = -\int_x^0 \frac{dt}{e^t - t}$.

Pour tout *t* de [*x* ; 0], montrer que $\frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{e^t - t} \leq \frac{1}{-t}$ (on rappelle que $x < 0$), en déduire que $\int_x^0 \frac{dt}{e^t - t} \geq \ln(1-x)$ et la limite de *F* en $-\infty$.