Probabilités

1. **Dénombrements**

   Il y a $n! = n(n-1)(n-2)...3\times2\times1$ manières d'ordonner *n* objets.

   Il y a $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)...3\times2\times1}$ manières de prendre simultanément *k* objets dans un ensemble à *n* éléments. Pour calculer $\binom{n}{k}$, on a deux possibilités, le triangle de Pascal (pour *n* petit) et la formule directe (on part de *n* en haut, de *k* en bas, et en haut comme en bas on fait le produit de *k* entiers en diminuant de 1 à chaque fois).

   Propriétés des combinaisons :

   $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

   $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

2. **Méthodes**

   On fait un arbre quand on effectue successivement plusieurs opérations.

   On multiplie quand il y a plusieurs conditions successives (attention, il s'agit la plupart du temps de probabilités conditionnelles). Le connecteur logique est « et ».

   On ajoute quand on a plusieurs manières de gagner (mais il faut faire attention à l'intersection). Le connecteur logique est « ou ».

   Quand on descend les branches de l'arbre, on multiplie.

   Quand on passe d'une branche à l'autre, on ajoute.

3. **Conditionnement et dépendance.**

   $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$, ce qui permet de calculer les intersections.

   A et B sont indépendants si $p_B(A) = p(A)$, soit si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

   Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si les événements $X = a$ et $Y = b$ sont indépendants quels que soient *a* et *b*.

4. **Loi binomiale**

   On effectue *n* épreuves identiques, successives, indépendantes, à 2 issues (succès et échec). La probabilité du succès est *p*, celle de l'échec est 1–*p*. La probabilité d'obtenir exactement *k* succès est $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, celle d'obtenir au moins un succès est $1-(1-p)^n$. L'espérance de la loi binomiale (= nombre moyen de succès) est *np*.

5. **Lois à densité**

   Pour que *f* soit une densité de probabilité, il faut que *f* soit positive, et que l'intégrale de *f* soit 1. Dans cette condition, on a $p(a < X < b) = \int_a^b f(t)dt$. Qu'il y ait des inégalités larges ou strictes est indifférent.

   Loi uniforme : la fonction *f* est constante sur l'intervalle [*a* ; *b*] (et nulle sur l'extérieur), la valeur de la constante est $\frac{1}{b-a}$, et la probabilité d'une partie [*c* ; *d*] de l'intervalle est $\frac{d-c}{b-a}$

   Loi exponentielle : la fonction *f* est définie sur [0 ; +∞[par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, λ désignant une constante positive (et *f* est nulle sur]-∞ ; 0[). La probabilité de l'événement $X < a$ est $\int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda a}\right]_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$, et la probabilité de l'événement $X > a$ est bien sûr $e^{-\lambda a}$.