Le second degré

I Le trinôme, sa vie, son œuvre, ses soucis.

La forme canonique du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ s'obtient en factorisant par *a*, puis en reconnaissant le début d'un carré. On a :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Le discriminiant est $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation a dans ℝ deux solutions si Δ > 0, une seule (double) si Δ = 0, aucune si Δ < 0.

Ce sont : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, ou $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Remarque : On dit les *solutions* de l'équation, mais les *racines* du trinôme.

La forme factorisée du trinôme :

Si Δ > 0, on a $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Si Δ = 0, on a $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Somme et produit : Quand Δ > 0, en identifiant la forme factorisée et la forme développée, on obtient $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Signe du trinôme : On distingue 3 cas (on utilise la forme canonique ou la forme factorisée).

Si Δ < 0, le trinôme est toujours du signe de *a*.

Si Δ = 0, le trinôme est toujours du signe de *a* (mais il peut être nul, pour $x = \frac{-b}{2a}$).

Si Δ > 0, le trinôme est du signe de *a* à l'extérieur de ses racines, de –*a* à l'intérieur.

II Les paraboles

A la base, la parabole est la courbe de la fonction $x \to x^2$. Evidemment, il est facile de comprendre que la courbe de la fonction $x \to x^2 + 3$ est la même que la précédente, mais décalée de 3 vers le haut, que la courbe de $x \to -x^2 + 5$ est la même, mais retournée et décalée de 5 vers le haut. Par contre, il est plus difficile de réaliser que la courbe de $x \to (x+3)^2$ est la même, mais décalée de 3 **vers la gauche.** Deux explications, l'une vaseuse et simple, l'autre rigoureuse et compliquée (j'ai toujours dit que les maths c'était facile).

1) $(x+3)^2$ est un carré, donc positif. Quand il est nul c'est que x est égal à –3. Le point d'abscisse –3 est donc le point le plus bas de la parabole de $x \to (x+3)^2$, qui part donc comme $x \to x^2$, mais à partir du point (–3 ; 0), donc à gauche.

2) Posons $X = x + 3$, et $Y = y$. Notre parabole $y = (x+3)^2$ devient $Y = X^2$, et elle est donc la même que $y = x^2$, *mais dans un nouveau repère*. Quelle est son origine ? C'est le point pour lequel X et Y sont nuls, donc $x = -3$ et $y = 0$, donc à gauche.
Evidemment, c'est la technique du 2) qui sera la plus utile.

Cas de fonctions générales du second degré (pour l'instant avec $a = 1$)
On canonique
Exemple: Soit à étudier la courbe de $x \to x^2 - 5x + 6$:
$y = x^2 - 5x + 6 = (x-2,5)^2 - 6,25 + 6 = (x-2,5)^2 - 0,25$; donc $y + 0,25 = (x - 2,5)^2$. Posons alors $X = x - 2,5$, et $Y = y + 0,25$. On obtient $Y = X^2$, donc une parabole basique, mais dans un repère d'origine $X = 0$, $Y = 0$, donc $x = 2,5$; et $y = -0,25$, c'est à dire décalé de 2,5 à droite, et de 0,25 vers le bas.
<u>Remarque</u>: Par souci de logique et de rigueur, le point (2,5 ; –0,25), point le plus bas de la parabole, s'appelle bien sûr son sommet.

J'entends déjà les hurlements «Que faire si a n'est pas égal à 1 ? »
Dans ce cas, on le met en facteur, et on recommence, mais il y a une petite subtilité :
par exemple $y = 2x^2 + 5x + 3$ s'écrit :
$y = 2(x^2 + 2,5x) + 3 = 2[(x + 1,25)^2 - 1,5625] + 3 = 2(x + 1,25)^2 - 0,125$, ou encore $y + 0,125 = 2(x + 1,25)$. On obtient donc la parabole $Y = 2X^2$ (qui a le même look que $y = x^2$, mais en plus resserré), avec pour sommet le point (–1,25 ; –0,125).

Sens de variation d'une fonction trinôme :
Pour la fonction ax^2, tout dépend du signe de a :
Si $a > 0$, la fonction est décroissante sur $]-\infty , 0]$ et croissante sur $[0 , +\infty [$, alors que si $a < 0$ c'est exactement le contraire.
Dans le cas de $ax^2 + bx + c$, on canonique comme dans la question précédente, et on a le même tableau de variation que pour ax^2, sauf bien sûr que l'on doit s'arrêter au sommet.

III Les cercles

Un cercle est l’ensemble des points situés à une distance *R* du centre Ω. Si on munit le plan d’un repère orthonormé, et que Ω a pour cordonnées (*a*, *b*), écrire que *M*(*x*, *y*) est à une distance *R* de Ω, c’est écrire $\Omega M^2 = R^2$, ou encore $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^3$ (1). On développe l’égalité précédente et on obtient (2) $x^2+y^2-2ax-2by = R^2-a^2-b^2$. C’est l’équation du cercle de centre Ω et de rayon R.

Réciproquement tout machin de la forme précédente est l’équation d’un cercle (si tout se passe bien). Pour en trouver le centre et le rayon on canonique. Je m’explique :

Soit l’ensemble d’équation $x^2+y^2+4x-6y=12$. On l’écrit $(x+2)^2-4+(y-3)^2-9=12$, donc $(x+2)^2+(y-3)^2=25$, on a donc affaire au cercle de centre (–2 ; 3), de rayon 5, par identification avec la formule (1). Ca pourrait mal se passer si on trouvait à droite de l’égalité un nombre négatif (on aurait alors l’ensemble vide).

Pour trouver l’intersection d’un cercle et d’une droite, on substitue la droite dans le cercle, et on fait les calculs (qui sont longs et fastidieux). On obtient une équation du second degré, et la droite sécante, tangente ou disjointe du cercle suivant le signe de Δ. Exemple avec le cercle précédent et la droite $2x+3y-4=0$. On écrit:

$y=\frac{-2}{3}x+\frac{4}{3}$ puis $x^2+(\frac{-2}{3}x+\frac{4}{3})^2+4x-6(\frac{-2}{3}x+\frac{4}{3})=25$

Un bref calcul donne alors $\frac{13}{9}x^2+\frac{56}{9}x-\frac{281}{9}=0$

On multiplie habilement l’équation précédente par 9, et $\Delta = 56^2+4\times 281\times 13 = 4\times 4437$, donc on obtient 2 valeurs possibles pour x, et pour chacune d’entre elles on calcule y en revenant à l’équation de la droite (just routine...).

Pour l’intersection de 2 cercles, c’est encore pire : On a un système de 2 équations du second degré à 2 inconnues (le pied). Il faut faire leur différence, par chance les x^2 et les y^2 s’éliminent, et on obtient une équation de droite (qui s’appelle, soit dit en passant, axe radical des deux cercles). On est donc ramené au problème précédent, on substitue la droite dans un des cercles, on retrousse ses manches et on est parti dans les calculs. Un exemple avec le cercle précédent et le cercle $x^2+y^2-3x+4y-10=0$ (au fait, déterminez son centre et son rayon) : La différence donne $7x-10y-2=0$, donc $y=0,7x-0,2$, puis :

$x^2+(0,7x-0,2)^2-3x+4(0,7x-0,2)-10=0$ (j’ai substitué au hasard dans le second cercle)

$1,49x^2-0,48x-10,76=0$, etc, etc... (la suite est sadiquement laissée au lecteur).

Remarque : les résultats précédents s’étendent à la géométrie de l’espace (on obtient bien sûr des sphères et non des cercles)