**Axes et centres de symétrie**

**Deux choses élémentaires :**
Une fonction $f$ est **paire** si : pour tout $x$ de $D_f$, $-x$ appartient aussi à $D_f$ et $f(-x) = f(x)$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Une fonction $f$ est **impaire** si : pour tout $x$ de $D_f$, $-x$ appartient aussi à $D_f$ et $f(-x) = -f(x)$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

**Un peu plus difficile :**
La droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de la courbe de $f$ si : $D_f$ est symétrique par rapport à $a$, et pour tout $h$ tel que $a + h$ appartient à $D_f$, $f(a+h) = f(a-h)$

**Extrêmement difficile :**
Le point $I(a,b)$ est centre de symétrie de la courbe de $f$ si : $D_f$ est symétrique par rapport à $a$ et …
Ecrivons une équation de la courbe de $f$ dans le repère $(I,\vec{i},\vec{j})$. Le centre de symétrie ne change pas de place, et il est l'origine du nouveau repère, donc ce la doit correspondre à une fonction impaire (ce n'est plus la fonction $f$).
Première étape : les formules de changement de repère.
Soit $M$ un point du plan, de coordonnées $(x, y)$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$, et $(X, Y)$ dans $(I,\vec{i},\vec{j})$. Les formules de changement de repère s'écrivent $\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}$. On peut se souvenir de ces formules grâce à la figure ci-dessous, ou la démontrer en écrivant $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$, et passer en coordonnées : $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \overrightarrow{OI}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.
Deuxième étape : on transforme
La courbe de $f$ a pour équation dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ : $y = f(x)$, et on remplace avec les formules de changement de repère pour obtenir dans $(I,\vec{i},\vec{j})$ : $Y + b = f(X + a)$. Il ne reste plus qu'à calculer jusqu'à obtenir $Y = g(X)$ (c'est une autre fonction), et la fonction $g$ doit être impaire.

On peut aussi utiliser un théorème :
Le point $I(a,b)$ est centre de symétrie de la courbe de $f$ si : $D_f$ est symétrique par rapport à $a$ et pour tout $h$ tel que $a + h$ appartient à $D_f$, $f(a+h) + f(a-h) = 2b$.