Classe de première 8 ***Mercredi 10 octobre 2007***

Devoir surveillé de mathématiques n°2

Exercice 1 (5 points)

On pose $P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 10x - 16$

1. Déterminer trois réels *a*, *b*, *c* tels que l'on ait $P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$
2. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $P(x) \geq 0$
3. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $-2x^6 + 3x^4 + 10x^2 - 16 \geq 0$.

Exercice 2 (7 points)

1. On dépose une bille sphérique de rayon 5 cm dans un vase cylindrique de rayon 8 cm, et on remplit d'eau jusqu'à recouvrir exactement la bille. Démontrer que le volume de l'eau ajoutée est $V = \frac{1420\pi}{3}$.
2. On enlève maintenant la bille (et on suppose que l'eau reste dans le récipient), et on en met une autre, de rayon *x* cm ($0 < x \leq 8$). On veut savoir si la bille dépasse ou non de la surface de l'eau. On note $V(x)$ le volume d'eau qu'il aurait fallu pour recouvrir exactement la bille de rayon *x*, et $f(x) = V(x) - V$. Démontrer que $f(x) = \frac{4\pi}{3}\left(-x^3 + 96x - 355\right)$.
3. Déterminer 3 réels *a, b, c* tels que l'on ait $f(x) = (x-5)(ax^2 + bx + c)$.
4. En déduire qu'il existe une valeur x_0 autre que 5 pour laquelle l'eau affleure exactement la bille. Donner l'arrondi au dixième de x_0.
5. Déterminer le signe de *f*(*x*) pour $0 < x \leq 8$. En déduire les valeurs de *x* pour lesquelles les billes sortent de l'eau, et celles pour lesquelles les billes sont sous l'eau.

Volume d'une sphère de rayon *R* : $\frac{4}{3}\pi R^3$

Volume d'un cylindre de rayon *R*, de hauteur *h* : $\pi R^2 h$

Exercice 3 (8 points)

1. On définit les fonctions f_1, f_2, f_3 par $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$.
   a) Donner l'expression des fonctions $f_1 \circ f_2$ et $f_2 \circ f_1$. Décrire leurs courbes représentatives (on ne demande pas de les tracer).
   b) Donner l'expression de la fonction $f_2 \circ f_1 \circ f_2$ et décrire sa courbe.
   c) Donner l'expression de la fonction $f_3 \circ f_2 \circ f_1$
2. On pose $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.
   a) Etudier la parité de *f* et calculer $f(0)$.
   b) Montrer que pour tout réel *x*, $0 \leq f(x) \leq 1$. En déduire le maximum de *f*.
   c) Soient *a* et *b* deux réels positifs avec $a \leq b$. Montrer que $f(a) \geq f(b)$ (on pourra transformer l'inégalité $a \leq b$ ou calculer $f(b) - f(a)$). En déduire le sens de variation de *f* sur [0 ; +∞[, puis sur]–∞ ; 0].
3. On pose $g(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$. En remarquant que $g(x) = 1 - f(x)$, expliquer comment la courbe de *g* se déduit-elle de celle de *f*.