Classe de Première 8 **Mercredi 28 mai 2008**

Devoir de mathématiques n°10

Exercice 1 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4x^2-x+1}{x}$, et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unités 2 cm sur (Ox), 1 cm sur (Oy).

1. Etudier les limites de f en 0, et en $+\infty$.
2. Prouver que la droite D d'équation $y=4x-1$ est asymptote à C. Quelle est l'autre asymptote ?
3. Calculer la dérivée de f, dresser son tableau de variations.
4. Soit a un réel non nul, et A le point de C d'abscisse a. Montrer que la tangente à C en A passe par l'origine O si et seulement si $f(a)=af'(a)$. Résoudre l'équation précédente et donner l'équation de la tangente T à C qui passe par O.
5. Tracer D, T et C.

Exercice 2 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On donne les points $A(2;1;0)$, $B(0;0;3)$ et $C(1;2;-1)$.

1. Représenter ces points. Sont-ils alignés ? (On justifiera sa réponse).
2. Donner une équation du cylindre Γ d'axe $\left(O,\vec{k}\right)$ passant par A.
3. Donner une équation de la sphère S de centre B, passant par O.
4. Montrer qu'un point $M(x,y,z)$ appartient à l'intersection de Γ et S si et seulement si $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ (z-3)^2=4 \end{cases}$.
5. En déduire que l'intersection de Γ et S est composée de deux cercles dont on précisera le plan, le centre et le rayon.

Exercice 3 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère polaire $\left(O,\vec{i}\right)$. On considère le point A de coordonnées polaires $A\left[2,\dfrac{\pi}{3}\right]$. On trace le carré indirect $OABC$.

1. Faire une figure.
2. Donner les coordonnées cartésiennes de A.
3. Donner les coordonnées polaires de C, puis ses coordonnées cartésiennes.
4. En déduire que les coordonnées cartésiennes de B sont $B\left(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1\right)$.
5. Donner les coordonnées polaires de B. En déduire la valeur exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 4 (3 points)

1. Résoudre dans $[0,2\pi[$ l'inéquation $-4\cos x-2\geq 0$.
2. On appelle f la fonction définie sur $[0,2\pi[$ par $f(x)=\cos 2x+2\cos x$. Justifier que $f'(x)=\sin x(-4\cos x-2)$.
3. Déduire des questions précédentes les variations de f.