Correction du dernier DS de maths (ouf)

Exercice 1

On a $f(x)=\dfrac{4x^2-x+1}{x}$. $\lim\limits_{x\to 0} 4x^2-x+1=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x=0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$.

On peut écrire $f(x)=4x-1+\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x-1=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

On a donc $f(x)-(4x-1)=\dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, donc la droite *D* d'équation $y=4x-1$ est asymptote à *C*. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$, l'autre asymptote à *C* est l'axe des ordonnées.

Pour tout $x>0$, on a $f'(x)=\dfrac{(8x-1)\times x-(4x^2-x+1)\times 1}{x^2}=\dfrac{4x^2-1}{x^2}=\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{x^2}$.

Comme $x>0$, $2x+1$ est toujours positif, x^2 aussi, donc $f'(x)$ a le signe de $2x-1$. On a donc le tableau de variations :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

L'équation de la tangente en *A* à *C* est $y=f'(a)(x-a)+f(a)$. Cette tangente passe par l'origine si quand *x* est nul, *y* l'est aussi, soit $0=f'(a)(0-a)+f(a)$, ce qui s'écrit $0=-af'(a)+f(a)$, soit $f(a)=af'(a)$.

Si on remplace $f(a)$ et $f'(a)$ par leur expression, on obtient l'équation :

$\dfrac{4a^2-a+1}{a}=a\dfrac{4a^2-1}{a^2}$ soit $a=2$. Ecrivons maintenant la tangente recherchée : $f(2)=\dfrac{17}{2}$ et $f'(2)=\dfrac{15}{4}$, l'équation recherchée est $y=\dfrac{15}{4}(x-2)+\dfrac{15}{2}$ soit $y=\dfrac{15}{4}x$, la droite passe bien par l'origine.

Voir courbe sur votre calculatrice favorite.

Exercice 2

La représentation est laissée au lecteur. On a $A(2;1;0)$, $B(0;0;3)$ et $C(1;2;-1)$ donc $\overrightarrow{AB}(-2,-1,3)$ et $\overrightarrow{AC}(-1,1,-1)$, ces deux vecteurs ne sont certainement pas colinéaires donc les points *A*, *B*, *C* ne sont pas alignés.

Un cylindre d'axe $(O,\vec{k})$ a une équation de la forme $x^2+y^2=R^2$. Comme il passe par *A*, les coordonnées de *A* vérifient son équation. On obtient donc $x^2+y^2=5$ comme équation de Γ.

Une sphère de centre *B* a pour équation $x^2+y^2+(z-3)^2=R^2$. Elle passe par l'origine donc $R=OB=3$. L'équation de *S* est donc $x^2+y^2+(z-3)^2=9$

Un point appartient à l'intersection de *S* et Γ si et seulement si $\begin{cases}x^2+y^2=5\\ x^2+y^2+(z-3)^2=9\end{cases}$, mais on peut soustraire les deux équations, et on obtient bien $\begin{cases}x^2+y^2=5\\ (z-3)^2=4\end{cases}$.

L'équation $(z-3)^2=4$ devient $z-3=2$ ou $z-3=-2$ soit $z=5$ ou $z=1$. On se trouve donc dans deux plans horizontaux. Dans chacun de ces plans, $x^2+y^2=5$ est l'équation d'un cercle de rayon $\sqrt{5}$, de centre le point $x=0, y=0$. L'intersection de *S* et Γ est donc la réunion de deux cercles, situés dans les plans d'équation $z=5$ ou $z=1$, de centres respectifs $\Omega_1(0,0,5)$ et $\Omega_2(0,0,1)$, de rayon $\sqrt{5}$.

Exercice 3

Je n'ai pas très envie de faire la figure.

On a $A\left[2,\dfrac{\pi}{3}\right]$ donc $A\left(2\cos\dfrac{\pi}{3},2\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ soit $A\left(1,\sqrt{3}\right)$.

$OABC$ est indirect donc $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ et $\left(\vec{i},\overrightarrow{OC}\right)=\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{\pi}{6}$.

Comme d'autre part $OA=OC$, on a $C\left[2;-\dfrac{\pi}{6}\right]$, et donc $C\left(2\cos-\dfrac{\pi}{6},2\sin-\dfrac{\pi}{6}\right)$, soit finalement $C\left(\sqrt{3},-1\right)$.

On a $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ donc $x_B=x_A+x_C=1+\sqrt{3}$ et $y_B=y_A+y_C=-1+\sqrt{3}$. On a bien $B\left(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1\right)$.

Comme de plus $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$, on peut écrire $\left(\vec{i},\overrightarrow{OB}\right)=\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}$.

OB est la diagonale du carré donc $OB=OA\sqrt{2}=2\sqrt{2}$. On a donc $B\left[2\sqrt{2},\dfrac{\pi}{12}\right]$.

On peut écrire $x_B=2\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{12}$ donc $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Exercice 4

$-4\cos x-2\geq 0$ s'écrit $\cos x\leq -\dfrac{1}{2}$ donc les solutions dans $[0,2\pi[$ sont $\left[2\dfrac{\pi}{3},4\dfrac{\pi}{3}\right]$.

$f(x)=\cos 2x+2\cos x$ donc

$f'(x)=-2\sin 2x-2\sin x=-4\sin x\cos x-2\sin x=\sin x(-4\cos x-2)$

Faisons donc un tableau de signes :

x	0		$2\dfrac{\pi}{3}$		π		$4\dfrac{\pi}{3}$		2π
$-4\cos x-2$		$-$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	$+$	0	$+$		$-$		$-$	0
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	$-\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$	3

Vacances….