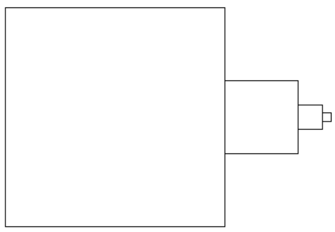
Classe de première 8 **Lundi 17 mars 2008**

Devoir de mathématiques n°7

Exercice 1 (5 points)

Les questions sont indépendantes.

1. On s'aperçoit que $1=1^2$, $1+3=4=2^2$, $1+3+5=9=3^2$, $1+3+5+7=16=4^2$ et on désire généraliser cette jolie chose.
   On nomme donc (u_n) la suite des entiers naturels impairs. Démontrer que c'est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   On nomme enfin $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$. Donner l'expression de S_n en fonction de n, et conclure.
2. On trace un carré de côté 9. On dessine sur son côté droit un carré de côté 3, puis un carré de côté 1, etc, en prenant chaque fois le tiers du côté du carré précédent. On construit ainsi une jolie tour (voir dessin).
   Pour tout $n \geq 1$ on nomme u_n l'aire du $n^{\text{ème}}$ carré. Préciser la nature de la suite (u_n) et donner l'expression de u_n fonction de n.
   Quelle est l'aire totale de la tour si on a la patience de poser 10 carrés ?



Exercice 2 (7 points)

$ABCD$ est un quadrilatère, I est le milieu de $[AB]$, J celui de $[BC]$, K celui de $[CD]$ et L celui de $[DA]$. On appellera G l'isobarycentre de $ABCD$.

1. Faire une figure claire que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Montrer que G est le milieu de $[IK]$ et de $[JL]$. Que peut-on en conclure sur le quadrilatère $IJKL$?
3. M désignant un point quelconque du plan, montrer que le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ est un vecteur constant égal à $2\overrightarrow{KI}$.
4. Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{C}_1$ des points M du plan vérifiant l'égalité : $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\vec{u}\right\|$.
5. De même, déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{C}_2$ des points M du plan vérifiant l'égalité : $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\|$.
6. A quelle condition (portant sur le quadrilatère $IJKL$) les deux ensembles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont-ils confondus ?

Exercice 3.

1. On appelle f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4x+3}{x+2}$. Etudier les variations de f. Résoudre l'équation $f(x)=x$.
2. Construire dans le repère ci-dessous la courbe représentative de f ainsi que la droite d'équation $y=x$.
3. On appelle (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{4u_n+3}{u_n+2} \end{cases}$. Calculer u_1, u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
4. Représenter les premiers termes de la suite (u_n) à l'aide du graphique de la question 2. Quel semble être le sens de variation de (u_n) ? Sa limite ?
5. Pour tout entier n, on pose $v_n=\dfrac{u_n+1}{3-u_n}$. Calculer v_0, v_1, v_2.
6. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 5.
7. En déduire l'expression de (v_n) puis de (u_n) en fonction de n.