

**Devoir de mathématiques n°9**

**Exercice 1 (7 points)**

1. On appelle  $U = (u_n)$  la suite définie par  $u_n = 4n - 10$ . Quelle est la nature de la suite  $U$ ? En préciser les éléments caractéristiques.
2. On définit maintenant la suite  $V = (v_n)$  par  $v_0 = 4, v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 2n - 1$ . Vérifier que  $v_1 = 1, v_2 = \frac{3}{2}$ , et donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de  $v_{10}$ .
3. On pose enfin  $w_n = v_n - u_n$ . Calculer  $w_0, w_1, w_2$ . Démontrer que la suite  $W = (w_n)$  est géométrique, en préciser les éléments caractéristiques.
4. Donner l'expression de  $w_n$ , puis de  $v_n$  en fonction de  $n$ . Quelle est la limite de  $(v_n)$  ?
5. On pose pour tout  $n$  :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ . Donner l'expression de  $S_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 2 (13 points)**

1. On appelle  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{2}{x} \right)$ . Etudier la limite de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ . Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = \frac{1}{2}x$  est asymptote à la courbe de  $f$ . Préciser l'autre asymptote.
2. Etudier les variations de  $f$ , dresser son tableau de variation.
3. Représenter, dans un repère orthonormal d'unité 2 cm, la droite  $\Delta$ , la courbe de  $f$  ainsi que la droite  $D$  d'équation  $y = x$ .
4. On définit, pour tout  $n$ , la suite  $U = (u_n)$  par  $u_0 = 2, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{2}{u_n} \right)$ . Calculer  $u_1, u_2, u_3$ . Représenter les premiers termes de la suite sur le graphique précédent. Quel semble être le sens de variation de  $(u_n)$  ? Sa limite ?
5. Dans toute la suite, on admettra que pour tout  $n$  :  $\sqrt{2} \leq u_n \leq 2$ . Montrer alors que  $(u_n)$  est décroissante.
6. Montrer que, pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$ .
7. Montrer que, pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{u_n - \sqrt{2}}{2}$ .
8. En déduire que, pour tout  $n$  :  $u_n - \sqrt{2} \leq \frac{u_0 - \sqrt{2}}{2^n}$  et la limite de  $(u_n)$ .

Remarque culturelle : cette suite s'appelle suite de Babylone. Elle était connue il y a 3000 ans par les Babyloniens, et elle a la propriété de converger très vite vers sa limite. Elle était

utilisée pour donner une valeur approchée de  $\sqrt{a}$  (en prenant  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right)$  bien sûr).