L'histoire d'une bille

Quand l'eau affleure la bille, la hauteur d'eau est égale au diamètre de la bille, soit 10 cm. Le volume d'eau est donc égal au volume d'un cylindre de hauteur 10 cm, de rayon 8 cm, auquel on enlève le volume de la bille. Soit donc :

$V = \pi\times 8^2\times 10 - \frac{4}{3}\pi\times 5^3 = 640\pi - \frac{500\pi}{3} = \frac{1920\pi}{9} - \frac{500\pi}{3} = \frac{1420\pi}{3}$.

Avec une bille de rayon x, on a une hauteur d'eau de $2x$, et un volume égal à :

$V(x) = \pi\times 8^2\times 2x - \frac{4}{3}\pi x^3 = 128\pi x - \frac{4}{3}\pi x^3$.

Et finalement $f(x) = V(x) - V = 128\pi x - \frac{4}{3}\pi x^3 - \frac{1420\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\left(-x^3 + 96x - 355\right)$.

Factorisons le polynôme par $x-5$, tout d'abord sans tenir compte du facteur $\frac{4\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}(x-5)\left(ax^2+bx+c\right) &= ax^3+bx^2+cx-5ax^2-5bx-5c\\ &= ax^3+(b-5a)x^2+(c-5b)x-5c\end{aligned}$$

Par identification à $-x^3+96x-355$, on peut écrire

$$\begin{cases} a=-1\\ b-5a=0\\ c-5b=96\\ -5c=-355\end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a=-1\\ b=5a=-5\\ c=96+5b=71\\ c=\frac{355}{5}=71 \text{ vérifié}\end{cases} \quad \text{donc } f(x)=\frac{4\pi}{3}(x-5)\left(-x^2-5x+71\right).$$

Quand $f(x)=0$, c'est qu'il aurait fallu mettre la même quantité d'eau pour la bille de rayon x que pour la bille de rayon 5, donc celle de rayon x aussi est exactement recouverte.

Résolvons donc $-x^2-5x+71=0$: $\Delta=(-5)^2-4\times(-1)\times 71=25+284=309$. Il y a donc deux solutions : $x_1=\frac{5-\sqrt{309}}{-2}=\frac{\sqrt{309}-5}{2}\approx 6{,}3$ et $x_1=\frac{5+\sqrt{309}}{-2}=\frac{-\sqrt{309}-5}{2}\approx -11{,}3$. Comme on recherche un rayon, seule la valeur x_1 convient.

Quand $f(x)>0$, on a $V(x)>V$, c'est donc qu'il aurait fallu mettre plus d'eau pour la bille de rayon x que pour la bille de rayon 5, donc celle de rayon x dépasse. Etudions le signe de $f(x)$ sur l'intervalle [0 ; 8]. On n'a pas besoin de tenir compte de $\frac{4\pi}{3}$ qui est positif, $-x^2-5x+71$ est positif entre ses racines, donc entre 0 et x_1, et négatif entre x_1 et 8.

x	0		5		x_1		8
$x-5$		–	0	+		+	
$-x^2-5x+71$		+		+	0	–	
		–	0	+	0	–	

Ainsi la bille dépasse de l'eau quand son rayon est compris entre 5 et x_1, elle est recouverte quand son rayon est inférieur à 5 ou supérieur à x_1.