Classe de première 8 ***Vendredi 8 février 2008***

Devoir de mathématiques n°6

Exercice 1 (8 points)

Une fermière myope a dans sa basse-cour 6 canards et x poules. Elle prend successivement 2 volatiles au hasard (sans remettre le premier).

1. Représenter par un arbre pondéré cette épreuve.
2. En déduire en fonction de x les probabilités des événements suivants :

A : Elle a pris 2 canards

B : Elle a pris 2 poules

C : Elle a pris un animal de chaque espèce.

3. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de poules obtenues. Donner la loi de X, calculer son espérance (les résultats seront donnés en fonction de x)
4. Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \dfrac{12x}{(x+5)(x+6)}$. Résoudre l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$, calculer la dérivée de f, étudier les variations de f et dresser son tableau de variations (on ne demande pas de courbe).
5. En déduire les valeurs de x pour que
   a) Notre fermière ait une chance sur 2 d'avoir un animal de chaque espèce.
   b) La probabilité d'avoir un animal de chaque espèce soit maximale.

Exercice 2 (6 points)

Un mathématicien fou a fabriqué deux dés parfaits, à 6 faces, portant chacun les numéros 1, 2, 3, –1, –2, –3. Un des dés est noir, l'autre blanc. Il se donne deux points A et B, jette les dés et construit si possible le barycentre G de $\{(A, a)\ (B, b)\}$ où a est le résultat donné par le dé noir et b le résultat donné par le dé blanc.

1. Représenter cette épreuve par un arbre ou un tableau.
2. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   a) A son grand désespoir, le mathématicien ne peut pas construire le barycentre.
   b) Le barycentre construit est le milieu de $[AB]$.
   c) Le barycentre est à l'intérieur du segment $[AB]$
3. Combien de points différents notre héros peut-il construire ? Les représenter dans le cas $a = 1$, $b = 3$; $a = 1$, $b = -2$;

Exercice 3 (6 points)

ABC est un triangle. On appelle G le point défini par $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Exprimer G comme un barycentre de A et B.
3. Soit x un réel. On appelle H le barycentre de $\{(A, 1)\ (B, 2)\ (C, x)\}$.
   a) Pourquoi x ne peut-il pas être égal à –3 ?
   b) Construire H dans le cas où $x = 3$
4. Démontrer que H est toujours sur (CG). Déterminer x dans le cas où H est le symétrique de G par rapport à C.
5. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = 3MC$.