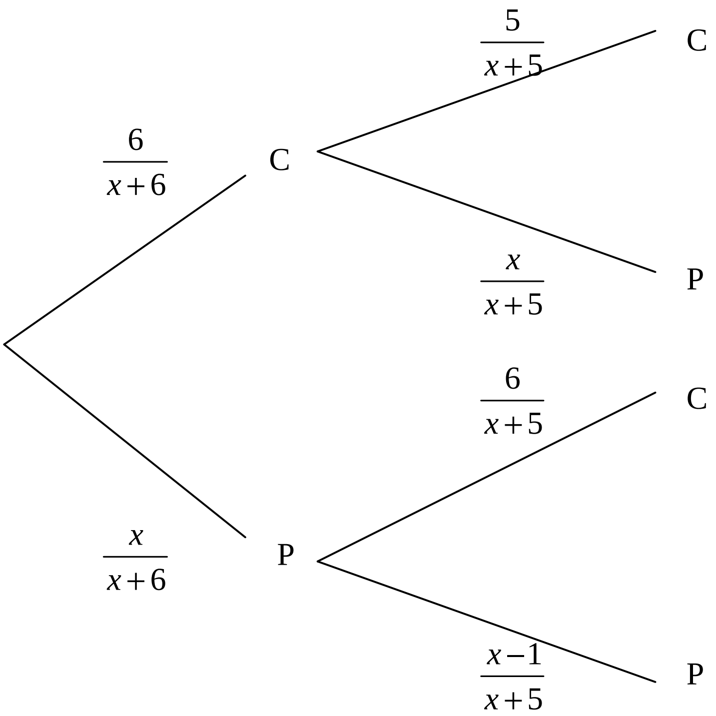
Classe de première 8

Correction du DS : probabilités-barycentres

Exercice 1

La fermière a au premier tirage x + 6 volatiles, 6 canards et x poules. Elle en tire un premier, il en reste x + 5, 5 canards et x poules si elle a tiré un canard, et 6 canards et x – 1 poules si elle a tiré une poule. On obtient donc l'arbre suivant :



Et les probabilités sont donc (on multiplie les probabilités de chaque branche)

Pour 2 canards : $p(A)=\frac{6}{x+6}\times\frac{5}{x+5}=\frac{30}{(x+6)(x+5)}$.

Pour 2 poules : $p(B)=\frac{x}{x+6}\times\frac{x-1}{x+5}=\frac{x(x-1)}{(x+6)(x+5)}$

Pour un animal de chaque espèce : $p(C)=\frac{6}{x+6}\times\frac{x}{x+5}+\frac{x}{x+6}\times\frac{6}{x+5}=\frac{12x}{(x+6)(x+5)}$.

La variable aléatoire X égale au nombre de poules obtenues prend les valeurs 0, 1 et 2. Les événements X = 0, X = 1 et X =2 sont respectivement les événements A, C et B. On a donc :

Valeurs de X : x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{30}{(x+6)(x+5)}$	$\frac{12x}{(x+6)(x+5)}$	$\frac{x(x-1)}{(x+6)(x+5)}$

Et l'espérance de X vaut :

$E = 0 \times p(X=0) + 1 \times p(X=1) + 2 \times p(X=2) = \frac{12x}{(x+5)(x+6)} + 2\frac{x(x-1)}{(x+5)(x+6)} = \frac{2x^2+10x}{(x+5)(x+6)}$

On pose maintenant $f(x) = \frac{12x}{(x+5)(x+6)} = \frac{12x}{x^2+11x+30}$ pour $x > 0$.

L'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ est équivalente à $\frac{12x}{x^2+11x+30} = \frac{1}{2}$ soit $24x = x^2+11x+30$ ou encore $x^2-13x+10=0$. Son discriminant est 49 est ses solutions son 3 et 10.

La dérivée de *f* vaut : $u(x)=12x, v(x)=x^2+11x+30$ donc $u'(x)=12, v'(x)=2x+11$ et

$$f'(x) = \frac{12(x^2+11x+30)-12x(2x+11)}{(x^2+11x+30)^2} = 12\frac{x^2+11x+30-2x^2-11x}{(x^2+11x+30)^2} = 12\frac{30-x^2}{(x^2+11x+30)^2}.$$

Comme *x* est positif, *f'*(*x*) est positif sur $\left]0,\sqrt{30}\right[$ et négatif sur $\left]\sqrt{30},+\infty\right[$.

On a donc le tableau :

x	0		$\sqrt{30}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$	0	↗	$f(\sqrt{30})$	↘	0

La fonction *f* est la probabilité d'avoir un animal de chaque espèce. Elle est égale à $\frac{1}{2}$ pour $x = 3$ et $x = 10$. Il faut donc 3 ou 10 poules pour avoir une chance sur deux de tirer un animal de chaque espèce.

La fonction *f* est maximale en $\sqrt{30}$ qui est compris entre 5 et 6. Alors, c'est 5 ou 6 poules qu'il faut ? Pour 5 poules, la probabilité est $f(5) = \frac{12\times5}{(5+5)(5+6)} = \frac{6}{11}$, et pour 6 poules, c'est $f(6) = \frac{12\times6}{(6+5)(6+6)} = \frac{6}{11}$. Il faut donc 5 ou 6 poules pour que la probabilité soit maximale.

Exercice 2

Représentons l'épreuve du mathématicien fou sous forme de tableau :

a \ *b*	–3	–2	–1	1	2	3
–3	(–3 ; –3)	(–3 ; –2)	(–3 ; –1)	(–3 ; 1)	(–3 ; 2)	(–3 ; 3)
–2	(–2 ; –3)	(–2 ; –2)	(–2 ; –1)	(–2 ; 1)	(–2 ; 2)	(–2 ; 3)
–1	(–1 ; –3)	(–1 ; –2)	(–1 ; –1)	(–1 ; 1)	(–1 ; 2)	(–1 ; 3)
1	(1 ; –3)	(1 ; –2)	(1 ; –1)	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(–1 ; 3)
2	(2 ; –3)	(2 ; –2)	(2 ; –1)	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)
3	(3 ; –3)	(3 ; –2)	(3 ; –1)	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)

Le tableau a 36 cases, l'univers a 36 éléments, il est muni de la loi uniforme car le mathématicien est fou mais les dés sont parfaits.

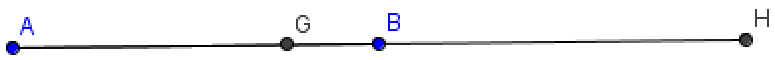
Le barycentre n'existe pas quand $a + b = 0$, soit 6 cases du tableau. $p(a) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

On est au milieu de [*AB*] quand $a = b$, soit 6 cases du tableau. $p(b) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

On est à l'intérieur du segment [AB] quand a et b sont de même signe, soit 9 (positifs) + 9 (négatifs) cases, donc $p(C)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$.

Mis à part le milieu (6 cases) et les cas où il n'y a pas de barycentre (6 autres cases), il reste 24 cases. Chaque barycentre est compté 2 fois, car le barycentre ne change pas si on change les deux signes, et il n'y a pas de proportionnalité possible. On a donc 12 barycentres possibles, plus le milieu, donc 13 points différents.

Reste à construire le barycentre G de (A ; 1) (B : 3) : $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et le barycentre H de (A ; 1) (B ; –2) : $\overrightarrow{AH}=\frac{-2}{-1}\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}$



Exercice 3

$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}=2\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)$, $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GB}$ soit $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$, G {(A ; 1) (B ; 2) (C ; x)}.

H est le barycentre de {(A ; 1) (B ; 2) (C ; x)}. La somme des coefficients ne pouvant pas être nulle, x ne peut pas être égal à –3.

Quand x vaut 3, H est le barycentre de {(A ; 1) (B ; 2) (C ; 3)} donc aussi de {(G ; 3) (C ; 3)} car G est le barycentre de {(A ; 1) (B ; 2)}. Il est donc au milieu de [CG].

Dans tous les cas, H est le barycentre de {(A ; 1) (B ; 2) (C ; x)} donc de {(G ; 3) (C ; x)} par associativité. Etant barycentre de G et C, il est sur (GC).

On sait que $3\overrightarrow{HG}+x\overrightarrow{HC}=\vec{0}$, donc quand il est symétrique de G par rapport à C, on a $\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{HC}$. On obtient $3\overrightarrow{HG}=6\overrightarrow{HC}$ donc $3\overrightarrow{HG}-6\overrightarrow{HC}=\vec{0}$. Il faut donc que x soit égal à –6.

Pour tout point M d plan, on sait que $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MG}$. L'égalité $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=3MC$ s'écrit $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=3MC$ soit $MG=MC$. L'ensemble cherché est la médiatrice de [GC]