Classe de première 8
Corrigé du DS n°3 (produit scalaire)

Exercice 1

2. L'angle $\widehat{ABC}$ est droit et l'angle $\widehat{ABE}$ vaut 60° donc l'angle $\widehat{EBC}$ vaut 30°.
   On en déduit que $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE} = BC\times BE\times\cos\left(\widehat{EBC}\right)=\cos(30°)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   Comme $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}=EA\times EB\times\cos\left(\widehat{AEB}\right)=\cos(60°)=\dfrac{1}{2}$
4. On sait que $BC=BG=1$ (propriétés des carrés et des triangles équilatéraux). D'autre part, $\widehat{CBG}=\widehat{EBG}-\widehat{EBC}=60°$. Le triangle *BCG*, isocèle avec un angle de 60°, est équilatéral.
   Par suite, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG}=BC\times BG\times\cos\left(\widehat{CBG}\right)=\cos(60°)=\dfrac{1}{2}$
   Et comme $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG}=-\dfrac{1}{2}$.
5. Calculons maintenant $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}\cdot\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\right)=AE^2+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EF}=1+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EF}$.
   D'autre part, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF}=-EA\times EF\times\cos\left(\widehat{FEA}\right)$ et comme on peut écrire $\widehat{FEA}=\widehat{FEB}+\widehat{BEA}=150°$, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EF}=-\cos(150°)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Finalement $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
6. Calculons maintenant $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BF}$ avec la relation de Chasles :
   $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BF}=\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}\right)=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$.
   Il se trouve que tous ces produits ont déjà été calculés, à l'exception de $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$, mais on sait que $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=\left(-\overrightarrow{EA}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{EB}\right)=\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}=\dfrac{1}{2}$.
   Finalement $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BF}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$
7. On vient de prouver que (*DE*) est perpendiculaire à (*BF*). Il est bien connu que (*EG*) et (*BF*) sont perpendiculaires (diagonales d'un carré). Les droites (*DE*) et (*EG*) sont donc parallèles, et comme elles ont *E* en commun, les points *D*, *E* et *G* sont alignés.

Exercice 2

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=AB\times AI\times\cos\left(\widehat{BAI}\right)=4\times2\times\cos(60°)=4$: réponse c.
2. (*DA*) et (*BH*) sont perpendiculaires donc $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BH}=0$: réponse c.
3. a) est forcément faux (un cosinus est entre –1 et 1). b) serait vrai si *A*, *B*, *C* étaient alignés (puisque $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$, si $AB=\dfrac{8}{3}$ alors $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=1$), reste c.
   Vérifions : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=AC^2-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=9-8=1$

4. b) est faux ($BC=\sqrt{26}$) ainsi que c ($\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB}=-\left(-4\times(-1)+3\times5\right)=-19$), il reste a). Vérifions : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=AB^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=25-19=6$
5. Mettons sous forme canonique l'équation du cercle :
   $x^2+y^2-10x+4y+23=0\Leftrightarrow(x-5)^2-25+(y+2)^2-4+23=0\Leftrightarrow(x-5)^2(y+2)^2=6$ Le centre a pour coordonnées $(5;-2)$ et le rayon est $\sqrt{6}$. Réponse b)
6. $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\left(\widehat{ABC}\right)=16+36-48\cos(40°)$ d'après la relation d'Al Kashi. On obtient à la calculatrice $AC\approx3{,}902$. Réponse a)
7. Le théorème de la médiane s'écrit $AB^2+AC^2=2AI^2+\dfrac{BC^2}{2}$, soit $9+25=2AI^2+\dfrac{36}{2}$, on obtient donc $AI=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Réponse b)

Finalement

Question	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Réponse	**c**	**c**	**c**	**a**	**b**	**a**	**b**

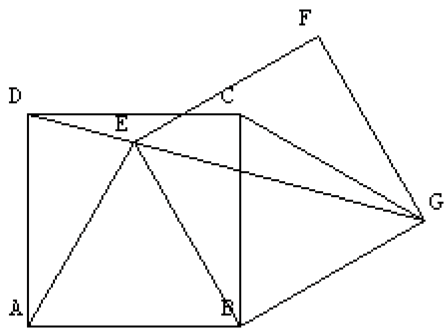
Exercice 3

1. Les droites (*AI*) et (*DE*) semblent perpendiculaires.
2. Sachant que *ABCD* est de côté 2 et *AEFG* de côté 3, on a :
   $A(0;0)$, $B(0;-2)$, $C(2;-2)$, $D(2;0)$, $E(0;3)$, $F(-3;3)$, $G(0;-3)$
3. $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}2-(-3)\\0-3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$. La droite (*FD*) passe par *D*, et elle est dirigée par $\overrightarrow{FD}$, un point $M(x;y)$ lui appartient si et seulement si $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont colinéaires, soit si et seulement si $-3(x-2)=5(y-0)\Leftrightarrow-3x+6=5y\Leftrightarrow3x+5y-6=0$.
4. $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}2-0\\-2-3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$. Le coefficient directeur de (*EC*) est donc $-\dfrac{5}{2}$, et son ordonnée à l'origine est clairement 3 (l'ordonnée de *E*). Elle e donc pour équation réduite $y=-\dfrac{5}{2}x+3$ ou pour équation cartésienne $2y=-5x+6\Leftrightarrow5x+2y-6=0$.
5. Résolvons le système formé par les équations de (*FD*) et (*EC*) pour déterminer les coordonnées de I :
   $\begin{cases}3x+5y=6 & (\times5) & (\times2)\\5x+2y=6 & (\times-3) & (\times-5)\end{cases}$. Il vient : $\begin{cases}15x+25y=30\\-15x-6y=-18\end{cases}$ donc $19y=12$ et $y=\dfrac{12}{19}$ et
   $\begin{cases}6x+10y=12\\-25x-10y=-30\end{cases}$ donc $-19x=-18$ et $y=\dfrac{18}{19}$. Finalement $I\left(\dfrac{18}{19},\dfrac{12}{19}\right)$.

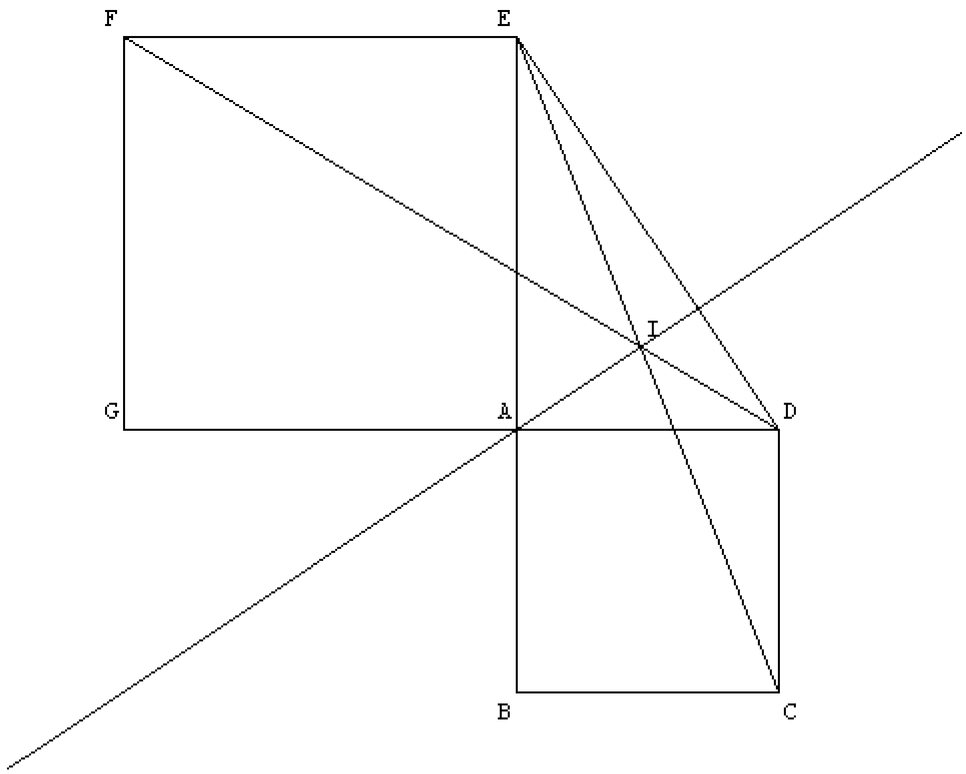
   On a donc $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\dfrac{18}{19}\\\dfrac{12}{19}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{ED}=2\times\dfrac{18}{19}-3\times\dfrac{12}{19}=0$. Les droites (*AI*) et (*ED*) sont donc perpendiculaires.

   Remarque : en appelant *a* et *b* les côtés des deux carrés, on pourrait faire les mêmes calculs (en plus compliqué), et on obtiendrait toujours la même orthogonalité.

Figures :



Exercice 1



Exercice 3