Classe de Première 8 ***Vendredi 7 décembre 2007***

Devoir de mathématiques n°4

Exercice 1 (9,5 points)

1. Restitution organisée de connaissances : formule d'addition des cosinus.

a. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ on place sur le cercle de centre *O*, de rayon 1, les points *A* et *B* tels que $\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}=a$ et $\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}}=b$ (voir figure 1). Donner les coordonnées des points *A* et *B* ainsi que la valeur de l'angle $\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}$.

b. En calculant de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}$, retrouver la formule $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.

c. En déduire les formules donnant $\cos(a+b)$ et $\cos(2a)$

2. *ABC* est un triangle isocèle en *A*, avec $AB=AC=1,\widehat{BAC}=\dfrac{\pi}{5}$. La bissectrice de l'angle $\widehat{CBA}$ coupe (*AC*) en *D* (voir figure 2). On appelle *a* la longueur *BC*. Donner la valeur des angles $\widehat{CBA},\widehat{CBD},\widehat{BDA},\widehat{BDC}$.
3. En déduire que les triangles *ABC* et *BCD* sont semblables, puis que $\dfrac{1}{a}=\dfrac{a}{1-a}$.
4. A l'aide du résultat précédent, démontrer que $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Calculer a^2.
5. En appliquant la relation d'Al Kashi au triangle *ABC*, démontrer que $\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.
6. A l'aide d'une formule de duplication, déterminer la valeur exacte de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

Exercice 2 (5 points)

ABC est un triangle avec *AB* = 8, *AC* = 5, $\widehat{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$.

1. Faire une figure (unité : 1 cm) que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Calculer *BC* et $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$ .En déduire $\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}$.
3. Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{D}$ des points *M* du plan tels que $\overrightarrow{BM}\bullet\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}$.
4. On appelle *I* le milieu de [*AB*] Calculer *CI*. Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{C}$ des points *M* du plan tels que $MA^2+MB^2=74$.

Exercice 3 (les questions sont indépendantes) (5,5 points)

1. Calculer, en terminant les calculs, la dérivée des fonctions suivantes :

$f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+2}$ $\qquad g(x)=\left(2\sqrt{x}+x\right)\left(\dfrac{x^2}{2}+1\right)$ $\qquad h(x)=\dfrac{5}{3}x^6+\dfrac{3}{4x}-2\sqrt{3}$

2. On pose $f(x)=ax\cos x+b\sin x$ (*a* et *b* désignant deux constantes réelles. Calculer la dérivée de *f*, puis déterminer les valeurs de *a* et *b* pour que l'on ait $f'(x)=x\sin x$.