Classe de première 8 :
Corrigé du DS n°1

Exercice 1

a) vrai (c'est du cours)
b) faux
c) vrai (par exemple $\frac{x(x^2+1)}{x^2+1}$
d) faux, de degré 6
e) faux, il y a $\sqrt{x}$
f) vrai, de degré 0
g) faux, inférieur ou égal au plus haut degré des deux, mais pas forcément au plus petit.
h) faux, il peut être inférieur aux deux si le terme de plus haut degré se compense.

Exercice 2

1. a) $2x^2 - x + 1 = 0$: $\Delta = 1 - 8 = -7$ donc $S = \varnothing$

   b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$:

   Posons $X = x^2$, on obtient $X^2 - 13X + 36 = 0$, $\Delta = 169 - 144 = 25$ donc on a deux possibilités pour X : $X_1 = \frac{13-5}{2} = 4$ et $X_2 = \frac{13+5}{2} = 9$. Revenons maintenant à x : $x^2 = X_1 = 4$ a pour solutions 2 et –2, $x^2 = X_2 = 9$ a pour solutions 3 et –3. Finalement $S = \{-2; -3; 2; 3\}$.

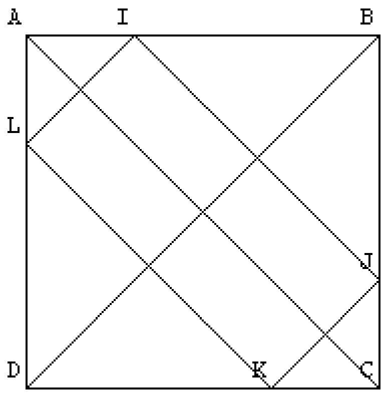
   c) Pour $x \neq 0$, $x + \frac{1}{x} = 3$ se met au même dénominateur $x + \frac{1}{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 1}{x} = 0$. Le quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul, soit si et ssi $x^2 - 3x + 1 = 0$. $\Delta = 9 - 4 = 5$, on a donc $S = \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2. $f(x) = 4x^2 + x - 5$ se factorise en cherchant les solutions de l'équation $4x^2 + x - 5 = 0$. $\Delta = 1 + 80 = 81$, il y a donc deux solutions $x_1 = \frac{-1-9}{8} = -\frac{5}{4}$ et $x_2 = \frac{-1+9}{8} = 1$. On a finalement la factorisation $f(x) = 4\left(x + \frac{5}{4}\right)(x-1) = (4x+5)(x-1)$

3. A partir de $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$, quand $\Delta \geq 0$, on écrit $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$, donc $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ avec $A^2 - B^2$, puis $f(x) = a\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$, et enfin on obtient $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1, x_2 sont les deux solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 3

1. On rappelle que la relation liant la vitesse, la distance et le temps est $D = VT$. Ici on connaît une distance de 300 kilomètres, appelons x la vitesse et y le temps. On a donc $xy = 300$. D'autre part, en allant à une vitesse $x+10$, on mettrait un temps $y-1$, pour la même distance, soit $(x+10)(y-1) = 300$ qui s'écrit $xy - x + 10y - 10 = 300$, et compte tenu de $xy = 300$, il reste $-x+10y-10=0$. On a donc bien le système $\begin{cases} xy = 300 \\ x = 10y-10 \end{cases}$. Résolvons-le par substitution :
   $\begin{cases} (10y-10)y = 300 \\ x = 10y-10 \end{cases}$, soit $\begin{cases} 10y^2 - 10y - 300 = 0 \\ x = 10y-10 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} y^2 - y - 30 = 0 \\ x = 10y-10 \end{cases}$.
   L'équation $y^2 - y - 30 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 120 = 121 = 11^2$, ses solutions sont donc $y_1 = \frac{1+11}{2} = 6, y_2 = \frac{1-11}{2} - 5$. On trouve ensuite $x_1 = 10y_1 - 10 = 50$ et $x_2 = 10y_2 - 10 = -60$. Compte tenu de la nature du problème, seules les valeurs positives sont à prendre en compte. On a roulé finalement 6 heures à 50 km/h
2.



Les triangles *AIL* et *BIJ* sont rectangles avec des angles de 45°, ils sont donc aussi isocèles, donc $AI = IL = x$ et $BI = BJ = a - x$, et d'après le théorème de Pythagore, $IL = \sqrt{AI^2 + AL^2} = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}$, et $IJ = \sqrt{(a-x)^2 + (a-x)^2} = (a-x)\sqrt{2}$.
L'aire du rectangle *IJKL* vaut donc $IJ \times IL = x\sqrt{2} \times (a-x)\sqrt{2} = 2x(a-x)$.
L'aire de *ABCD* vaut a^2.
IJKL est la moitié de *ABCD* si $2x(a-x) = \frac{1}{2}a^2$, équation qui s'écrit $4x(a-x) = a^2$ soit $4ax - 4x^2 = a^2$ ou encore $4x^2 - 4ax + a^2 = 0$. Ici l'inconnue est *x*, le discriminant est donc $\Delta = (4a)^2 - 4 \times 4 \times a^2 = 0$. Elle a donc une solution double $x = \frac{4a}{8} = \frac{a}{2}$. Il faut placer *I* au milieu de [*AB*] pour que l'aire de *IJKL* soit la moitié de celle de *ABCD*.
Posons maintenant $a = 6$. L'aire de *IJKL* est donc de $2x(6-x)$, celle de *ABCD* de 36.
La condition que l'aire de *IJKL* soit un tiers de celle de *ABCD* s'écrit $2x(6-x) = 12$, qui devient $12x - 2x^2 = 12$, soit $x^2 - 6x - 6 = 0$. $\Delta = 30 - 24 = 12$, on a donc deux solutions $x_1 = \frac{6+\sqrt{12}}{2} = 3+\sqrt{3}$ et $x_2 = \frac{6-\sqrt{12}}{2} = 3-\sqrt{3}$. On doit donc placer *I* à une distance $3+\sqrt{3}$ ou $3-\sqrt{3}$ du point *A* pour que l'aire de *IJKL* soit un tiers de celle de *ABCD*. Pour être complet, il faut signaler que les deux nombres $3+\sqrt{3}$ et $3-\sqrt{3}$ sont compris entre 0 et 6, donc que les solutions trouvées répondent bien au problème posé.