Classe de Première 8

Correction du DS : suites, barycentres.

Exercice 1

1. Les nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9 … vont de 2 en 2 (puisque les entiers sont alternés, un pair suivi d'un impair). Ils forment donc une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2. Si (u_n) désigne la suite des nombres impairs on a donc pour tout entier n : $u_n = 2n+1$.

La somme $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ est donc égale par théorème à $S_n = \frac{(u_0 + u_n)}{2}(n+1)$ (il y a n + 1 termes de 0 à n), ce qui fait $S_n = \frac{(1+2n+1)}{2}(n+1) = \frac{(2+2n)}{2}(n+1) = (n+1)(n+1)$. On a donc bien démontré qu'en ajoutant les nombres impairs consécutifs à partir de1 on obtient toujours un carré.

2. L'aire d'un carré est le carré de son côté, et comme à chaque fois le côté est divisé par 3, l'aire de chaque carré est égale à un neuvième de l'aire du carré précédent. La suite des aires est donc géométrique de premier terme $u_1 = 9^2 = 81$ et de raison $\frac{1}{9}$.

On peut donc écrire $u_n = 81 \times \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$ (attention, ici la suite commence à u_1 donc on n'emploie pas la formule $u_0 q^n$).

La somme des 10 carrés est égale à $S = 81 + 9 + 1 + \frac{1}{9} + ... + \frac{81}{9^9}$, ce qui est égal par théorème à

$$S = 81\frac{1-\frac{1}{9^{10}}}{1-\frac{1}{9}} = 81 \times \frac{9}{8}\left(1-\frac{1}{9^{10}}\right)$$ soit environ 91,125.

Exercice 2

G est l'isobarycentre de *A*, *B*, *C*, *D* soit le barycentre de (*A*, 1) (*B*, 1) (*C*, 1) (*D*, 1). Comme *I* est le milieu de [*AB*], soit le barycentre de (*A*, 1) (*B*, 1), et *K* le milieu de [*CD*], on a par associativité que *G* est le barycentre de (*I*, 2) (*K*, 2), soit le milieu de [*IK*]. En regroupant (*B*, 1) (*C*, 1) et (*A*, 1) (*D*, 1) on montre de même que *G* est le milieu de [*JL*].

IJKL a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, c'est donc un parallélogramme.

Si *M* est un point du plan, on sait, *I* étant le milieu de [*AB*], que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$. On a aussi $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MK}$ donc $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{MK} = 2\overrightarrow{KM} + 2\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{KI}$.

L'égalité $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\vec{u}\right\|$ est équivalente à $\left\|4\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|2\overrightarrow{KI}\right\|$ puisque, *G* étant l'isobarycentre de *A*, *B*, *C*, *D*, on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$ pour tout point *M* du plan.

On obtient donc $4MG = 2KI$ soit $MG = \frac{1}{2}KI = GI$. L'ensemble $\mathscr{C}_1$ est donc le cercle de centre *G*, passant par *I* (et *K*).

On peut écrire de même qu'à la question 3 que :

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}-\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=2\overrightarrow{ML}-2\overrightarrow{MJ}=2\overrightarrow{JL}$. Finalement l'égalité $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|$ est équivalente à $4MG=2JL$ soit $MG=\frac{1}{2}JL$. L'ensemble $\mathscr{C}_2$ est donc le cercle de centre *G*, passant par *J* (et *L*).

Les deux ensembles sont confondus quand *IK* = *JL*, donc quand le parallélogramme *IJKL* a ses diagonales de même longueur, c'est-à-dire quand c'est un rectangle.

Exercice 3

On a $f(x)=\frac{4x+3}{x+2}$ donc $f'(x)=\frac{4(x+2)-(4x+3)}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}$ est toujours positif. *f* est donc strictement croissante sur [0 ; +∞[.

L'équation $f(x)=x$ s'écrit $\frac{4x+3}{x+2}=x$ successivement équivalente à $4x+3=x(x+2)$ soit $4x+3=x^2+2x$ ou $x^2-2x-3=0$. Le discriminant vaut $\Delta=(-2)^2-4\times(-3)\times 1=16$, les solutions en sont –1 et 3. Compte tenu de l'ensemble de définition, la seule solution est 3.

La suite $\left(u_n\right)$ est définie par $u_0=0, u_{n+1}=\frac{4u_n+3}{u_n+2}$.

On a donc $u_1=\frac{4u_0+3}{u_0+2}=\frac{3}{2}$ et $u_2=\frac{4u_1+3}{u_1+2}=\frac{4\times\frac{3}{2}+3}{\frac{3}{2}+2}=\frac{9}{\frac{7}{2}}=\frac{18}{7}$.

Comme $u_1-u_0=\frac{3}{2}$ et $u_2-u_1=\frac{18}{7}-\frac{3}{2}=\frac{15}{14}$, la suite $\left(u_n\right)$ n'est pas arithmétique.

Comme $u_0=0$ et $u_1\neq 0$, elle n'est pas géométrique.

Au vu du tracé de la suite, elle semble croissante et converger vers 3, le point d'intersection de la courbe de *f* et de la droite d'équation *y* = *x*.

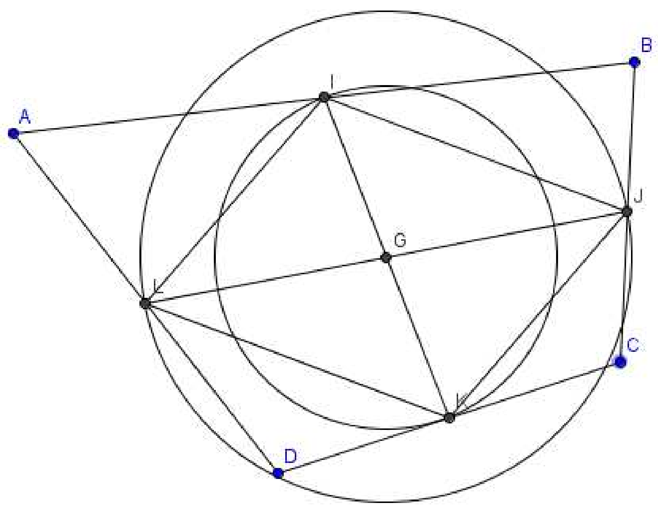
On pose maintenant $v_n=\frac{u_n+1}{3-u_n}$. $v_0=\frac{u_0+1}{3-u_0}=\frac{1}{3}$, $v_1=\frac{u_1+1}{3-u_1}=\frac{\frac{3}{2}+1}{3-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3}$ et $v_2=\frac{u_2+1}{3-u_2}=\frac{\frac{18}{7}+1}{3-\frac{18}{7}}=\frac{\frac{25}{7}}{\frac{3}{7}}=\frac{25}{3}$. Cette suite semble géométrique de raison 5. Prouvons-le.

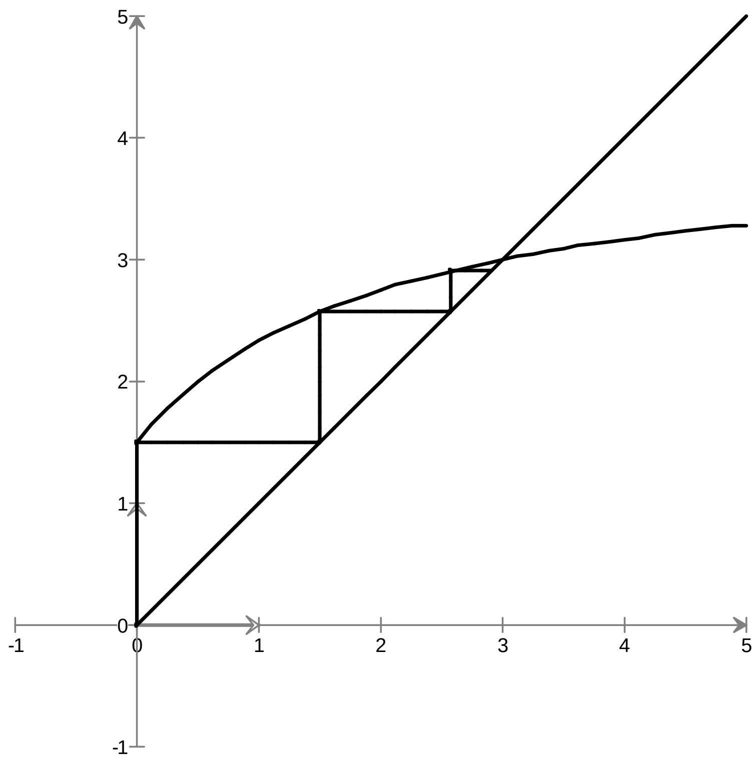
$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+1}{3-u_{n+1}}=\frac{\frac{4u_n+3}{u_n+2}+1}{3-\frac{4u_n+3}{u_n+2}}=\frac{\frac{4u_n+3+u_n+2}{u_n+2}}{\frac{3\left(u_n+2\right)-4u_n+3}{u_n+2}}=\frac{\frac{5u_n+5}{u_n+2}}{\frac{3-u_n}{u_n+2}}=\frac{5(u_n+1)}{3-u_n}=5v_n \text{ CQFD.}$$

On peut donc écrire $v_n=\frac{5^n}{3}$ pour tout entier *n*.

Reste à déterminer l'expression de u_n :

On a donc $v_n=\frac{5^n}{3}=\frac{u_n+1}{3-u_n}$ soit $5^n(3-u_n)=3(u_n+1)$ donc $3\times 5^n-3=u_n(3+5^n)$ et finalement : $u_n=\frac{3\times 5^n+3}{5^n+3}$.


A
B
I
J
G
L
C
K
D


5
4
3
2
1
0
-1
-1
0
1
2
3
4
5