Classe de première 10

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°2 : coordonnées cartésiennes.

Exercice 1 : Δ_a est la droite d'équation $(a+2)x+(a^2-1)y+a^2+a+1=0$.

Δ_a est parallèle à l'axe des ordonnées si son équation peut se mettre sous la forme $x=k$, donc si son coefficient de y est nul. L'équation $a^2-1=0$ a pour solutions 1 et -1.

Δ_a est parallèle à l'axe des abscisses si son équation ne comporte pas de terme en x, donc si $a+2=0$. La solution est donc $a=-2$.

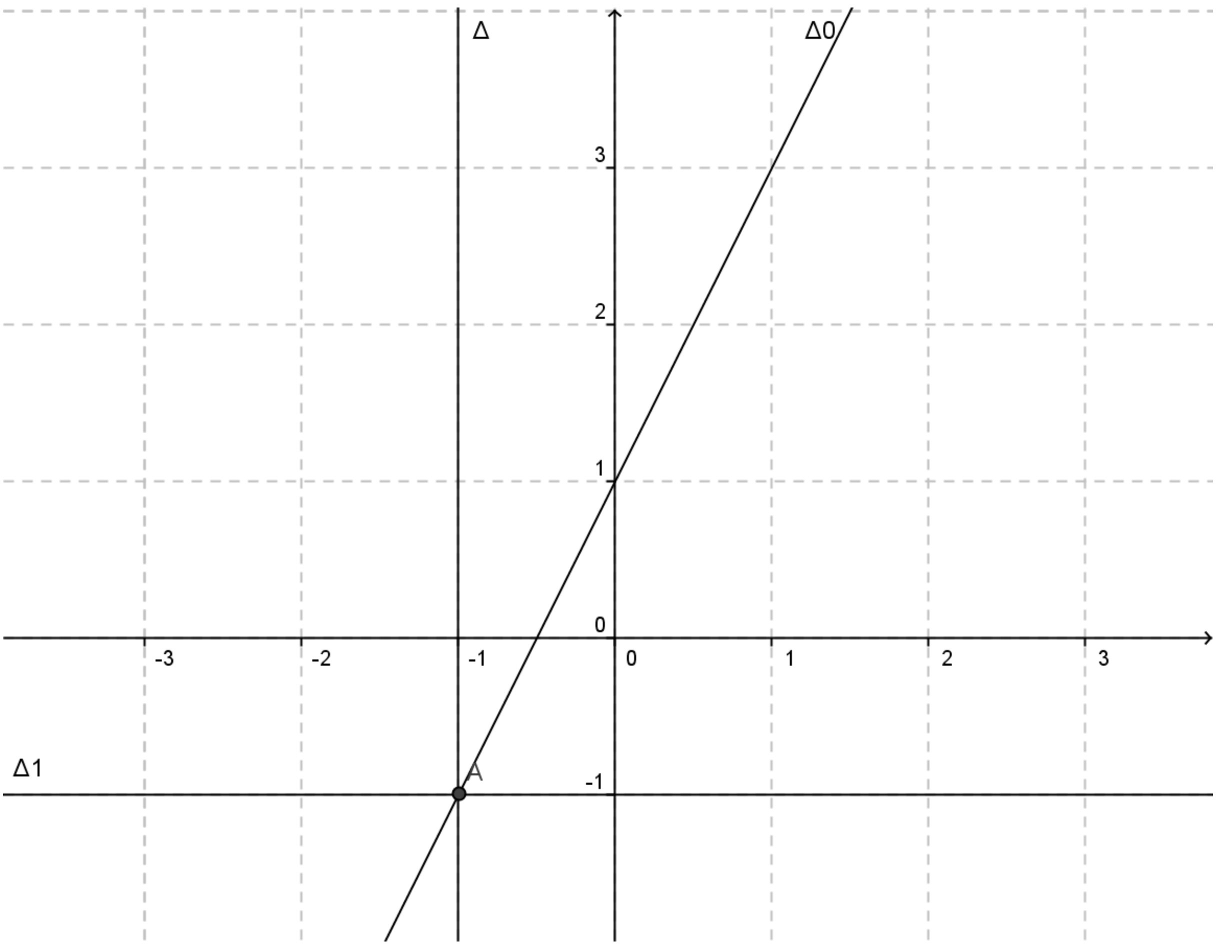
Δ_a passe par l'origine si son équation est vérifiée pour $x=0, y=0$. On obtient $a^2+a+1=0$, équation du second degré qui n'a pas de solution car son discriminant vaut -3.

Un vecteur directeur de Δ_a est $(-(a^2-1)\,;a+2)$. Il est colinéaire à $\vec{u}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$ si et seulement si $-2(a^2-1)=1(a+2)$, équation équivalente à $-2a^2=a$, dont les solutions sont 0 et $-\frac{1}{2}$.

Δ_0 a pour équation $2x-y+1=0$, Δ_1 a pour équation $3x+3=0$ équivalente à $x=-1$ et Δ_{-2} a pour équation $3y+3=0$, équivalente à $y=-1$. Les droites Δ_1, Δ_{-2} se coupent évidemment au point $A(-1\,;-1)$. Il reste à vérifier qu'il appartient aussi à Δ_0, ce qui est vrai car $2\times(-1)-(-1)+1=0$.

Vérifions que A appartient à Δ_a pour tout réel a :

$(a+2)\times(-1)+(a^2-1)\times(-1)+a^2+a+1=-a-2-a^2+1+a^2+a+1$ est en effet nul quel que soit a. Ainsi A appartient à Δ_a



Exercice 2

Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, $A(0\,;0)$ car c'est l'origine, $B(1\,;0)$ car $\overrightarrow{AB}$ est l'unité de l'axe des abscisses, $D(0\,;1)$ car $\overrightarrow{AD}$ est l'unité de l'axe des ordonnées. (BC) est parallèle à l'axe des ordonnées, donc B et C ont même abscisse, de même D et C ont même ordonnée et $C(1\,;1)$. I est un point de l'axe des abscisses, d'abscisse a donc $I(a\,;0)$, de même $J(0\,;b)$. Comme $AIKJ$ est un parallélogramme, pour les mêmes raisons que plus haut K a la même abscisse que I et la même ordonnée que J donc $K(a\,;b)$.

Il en résulte que $\overrightarrow{DI}(a\,;\,-1)$, $\overrightarrow{BJ}(-1\,;b)$ et $\overrightarrow{CK}(a-1\,;b-1)$

$P(x\,;y)$ appartient à (BJ) si et seulement si $\overrightarrow{BP}(x-1\,;y)$ et $\overrightarrow{BJ}(-1\,;b)$ sont colinéaires, donc si et seulement si $b(x-1)=-y$. $bx+y-b=0$ est une équation de (BJ).

$P(x\,;y)$ appartient à (DI) si et seulement si $\overrightarrow{DP}(x\,;y-1)$ et $\overrightarrow{DI}(a\,;\,-1)$ sont colinéaires, donc si et seulement si $-x=a(y-1)$. $ax+ay-a=0$ est une équation de (DI).

Pour déterminer les coordonnées de M, on résout le système $\begin{cases} bx+y-b=0 \\ x+ay-a=0 \end{cases}$. On élimine les y en multipliant la première ligne par a, on obtient $\begin{cases} abx+ay-ab=0 \\ x+ay-a=0 \end{cases}$, par soustraction $(1-ab)x-a+ab=0$ et $x=\frac{a(1-b)}{1-ab}$. On élimine les x en multipliant la deuxième ligne par b, on obtient $\begin{cases} bx+y-b=0 \\ bx+aby-ab=0 \end{cases}$, par soustraction $(1-ab)y-b+ab=0$ soit $y=\frac{b(1-a)}{1-ab}$. On a donc $M\left(\frac{a(1-b)}{1-ab}\,;\,\frac{b(1-a)}{1-ab}\right)$.

Vérifions enfin que C, M, K sont alignés : $\overrightarrow{CM}\left(\frac{a(1-b)}{1-ab}-1;\ \frac{b(1-a)}{1-ab}-1\right)$. Calculons séparément ces coordonnées : $\frac{a(1-b)}{1-ab}-1=\frac{a-ab-(1-ab)}{1-ab}=\frac{a-1}{1-ab}$ et $\frac{b(1-a)}{1-ab}-1=\frac{b-ab-(1-ab)}{1-ab}=\frac{b-1}{1-ab}$. On a finalement $\overrightarrow{CM}\left(\frac{a-1}{1-ab}\,;\,\frac{b-1}{1-ab}\right)$. Comme $\overrightarrow{CK}(a-1\,;b-1)$, on a $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{1-ab}\overrightarrow{CK}$ et les trois points C, M, K sont bien alignés.