**Classe de première 10** **Corrigé du DS n°4**

**Exercice 1**

1. La forme canonique s'obtient en écrivant le début d'un carré : $f(x) = x^2 - 4x - 5 = (x-2)^2 - 4 - 5 = (x-2)^2 - 9$. Les coordonnées du sommet de la courbe de $f$ sont $A(2\,;\,-9)$. La courbe est une parabole tournée vers le haut car le coefficient de $x^2$ vaut 1. La fonction $f$ admet donc un minimum en 2, elle est décroissante sur $]-\infty\,;2]$ et croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.
   On calcule le discriminant : $\Delta = 16 + 20 = 36$. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont donc $\frac{4-6}{2} = -1$ et $\frac{4+6}{2} = 5$. La fonction $f$ est du signe du coefficient de $x^2$ à l'extérieur des racines, et du signe contraire entre les racines. Elle est donc positive sur $]-\infty\,;\,-1] \cup [5\,;\,+\infty[$ et négative sur $[-1\,;5]$
2. La fonction $g = \sqrt{f}$ est définie quand $f$ est positive, donc sur $]-\infty\,;\,-1] \cup [5\,;\,+\infty[$ . Sur ces intervalles elle a le même sens de variation que $f$, elle est donc décroissante sur $]-\infty\,;\,-1[$ et croissante sur$5\,;\,+\infty[$ .
3. La fonction $h = \frac{1}{f}$ est définie quand $f$ n'est pas nulle, donc sur $\mathbb{R} - \{-1\,;5\}$. Sur chaque intervalle où $f$ ne s'annule pas et ne change pas de signe elle a le sens de variation contraire de $f$. Elle est donc croissante sur $]-\infty\,;1[$, croissante sur $]-1\,;2[$, décroissante sur $]2\,;5[$ et décroissante sur $]5\,;\,+\infty[$.
4. $k(x) = |f(x)|$. On a donc $k(0) = |f(0)| = |-5| = 5$, $k(4) = |f(4)| = |-5| = 5$ et $k(-3) = |f(-3)| = |16| = 16$. Pour calculer $k$, on garde $f$ quand $f$ est positive, donc sur $]-\infty\,;\,-1] \cup [5\,;\,+\infty[$ (la courbe est donc la même) et on prend $-f$ quand $f$ est négative, donc sur $[-1\,;5]$, et la courbe y est donc symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
5. $l(x) = f(|x|)$. On a donc $l(0) = f(0) = -5$, $l(4) = f(4) = -5$ et $l(-3) = f(3) = -8$. La fonction $l$ est paire et égale à $f$ pour $x \geq 0$, sa courbe est donc confondue avec celle de $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$, et est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

**Exercice 2**

1. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ donc $f(b) - f(a) = b + \frac{1}{b} - \left(a + \frac{1}{a}\right) = b - a + \frac{a-b}{a\,b}$ et en factorisant $b - a$ on trouve bien $(b-a)\left(1 - \frac{1}{ab}\right)$
2. Sur $[1\,;\,+\infty[$, on a $a \geq 1, b \geq 1$ donc $ab \geq 1$, $\frac{1}{ab} \leq 1$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$, donc $1 - \frac{1}{ab}$ est positif. Ainsi $f(b) - f(a)$ est du signe de $b - a$ et $f$ est croissante. De même sur $]0\,;1]$, $0 < ab \leq 1$ donc $\frac{1}{ab} \geq 1$ et $1 - \frac{1}{ab}$ est négatif. $f(b) - f(a)$ est du signe contraire de $b - a$ et $f$ est décroissante.
3. $f$ admet donc un minimum en 1, et ce minimum est égal à $f(1) = 2$. Ainsi pour tout $x$ de $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) \geq 2$ ce qui s'écrit $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

**Exercice 3**

1. $|2x+1| = |3x-2|$ si et seulement si les quantités dans les valeurs absolues sont égales ou opposées, soit $2x + 1 = 3x - 2$ ou $2x + 1 = -3x + 2$. En résolvant ces deux équations on obtient $S_1 = \{3, \frac{1}{5}\}$
2. $|3x-5| = 2$ si et seulement si $3x - 5 = 2$ ou $3x - 5 = -2$, on résout les équations et $S_2 = \{1\,;\,\frac{7}{3}\}$
3. $|x+4| \leq 5$ représente les réels situés à une distance inférieure ou égale à 5 du point $-4$, donc $S_3 = [-9\,;1]$
4. $|x| = x$ représente les réels égaux à leur valeur absolue, donc les réels positifs et $S_4 = [0\,;\,+\infty[$