Corrigé

Exercice 1 Version 1 :

1. $f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$ donc $f'(x) = \frac{1(x^2+1)-2x(x+3)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-6x+1}{(x^2+1)^2}$.
   $f(1) = 2$, $f'(1) = -\frac{3}{2}$ donc la tangente a pour équation $y = -\frac{3}{2}(x-1)+2$ soit $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$.
2. $g(x) = \left(2+\frac{1}{x}\right)(1+\sqrt{x})$ donc $g'(x) = \frac{-1}{x^2}(1+\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(2+\frac{1}{x}\right)$
3. $h(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$ donc $h'(x) = 3x^2 + 4x - 5$. La tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 2x$ si et seulement si son coefficient directeur est égal à 2, donc si et seulement si $h'(x) = 2$, ce qui s'écrit $3x^2 + 4x - 7 = 0$, équation dont les solutions sont 1 et $\frac{-7}{3}$. C'est donc aux points de la courbe d'abscisses respectives 1 et $\frac{-7}{3}$ que la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 2x$.

Version 2 :

1. $f(x) = \frac{x+2}{x^2+3}$ donc $f'(x) = \frac{1(x^2+3)-2x(x+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-4x+3}{(x^2+3)^2}$.
   $f(1) = \frac{3}{4}$, $f'(1) = -\frac{1}{8}$ donc la tangente a pour équation $y = -\frac{1}{8}(x-1)+\frac{3}{4}$ soit $y = -\frac{1}{8}x + \frac{7}{8}$.
2. $g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)(2+\sqrt{x})$ donc $g'(x) = \frac{-1}{x^2}(21+\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)$
3. $h(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$ donc $h'(x) = 6x^2 + 2x - 3$. La tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$ si et seulement si son coefficient directeur est égal à 1, donc si et seulement si $h'(x) = 1$, ce qui s'écrit $6x^2 + 2x - 4 = 0$, équation dont les solutions sont -1 et $\frac{2}{3}$. C'est donc aux points de la courbe d'abscisses respectives -1 et $\frac{2}{3}$ que la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 2

1. f' est le coefficient directeur de la tangente, donc $f'(0) = f'(2) = 0$ car les tangentes sont horizontales en B et D. La tangente en C passe par $E(0\,;\,-4)$ donc son coefficient directeur est $\frac{2-(-4)}{1-0} = 6$. Ainsi $f'(1) = 6$.
2. Elle a pour équation $y = 6x - 4$ (on a son ordonnée à l'origine).
3. L'équation $f(x) = 0$ a pour solution $x_1 \approx -0{,}5$, $x_2 \approx 0{,}6$ et $x_3 \approx 2{,}8$. f' est positive sur $[-1\,;\,x_1]$ et $[x_2\,;\,x_3]$ et négative sur $[x_1; x_2]$ et $[x_3\,;3]$.
4. Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ alors $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Les données que nous pouvons exploiter sont : $f(-1) = 6\, f(0) = -2, f(1) = 2, f(2) = 6$ ainsi que $f'(0) = 0, f'(1) = 6, f'(2) = 0$. Nous obtenons les équations suivantes :
   $\begin{cases} -a+b-c+d=6 \\ d=-2 \\ a+b+c+d=2 \\ 8a+4b+2c+d=6 \\ c=0 \\ 3a+2b+c=6 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases}$, soit en remplaçant c et d : $\begin{cases} -a+b=8 \\ a+b=4 \\ 8a+4b=8 \\ 3a+2b=6 \\ 12a+4b=0 \end{cases}$. Il y a l'embarras du choix, on trouve $a = -2$ et $b = 6$, et $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 2$.
5. La dérivée de f vaut alors $f'(x) = -6x^2 + 12x = 6x(-x+2)$.
6. f' s'annule en 0 et 2, et est positive entre ces valeurs car le coefficient de x^2 est négatif. On a donc le tableau de variations :

x	-1		0		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	6	$\searrow$	-2	$\nearrow$	6	$\searrow$	-2

7. On veut que F ait pour dérivée f. Il lui faut donc comporter un terme en x^4, un terme en x^3 et un terme en x. Comme la dérivée de x^4 est $4x^3$et que dans f il y a $-2x^3$, il nous faut $-\frac{1}{2}x^4$, et de même $2x^3$. On a donc $F(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 2x$. Comme le sens de variation de F est donné par le signe de sa dérivée f qui a été étudié à la question 4, on peut écrire

x	-1		x_1		x_2		x_3		3
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Exercice 3

1. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle OPM où $OP = 1$ et $OM = x$ donc $PM = \sqrt{1-x^2}$. La base du triangle APQ est $PQ = 2\sqrt{1-x^2}$, sa hauteur est $AM = x + 1$, donc l'aire de APQ vaut $f(x) = (x+1)\sqrt{1-x^2}$
2. Avec $u(x) = \sqrt{1-x^2}$, $u(x+h) = \sqrt{1-(x+h)^2}$ et $\frac{u(x+h)-u(x)}{h} = \frac{\sqrt{1-(x+h)^2}-\sqrt{1-x^2}}{h}$. En multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{1-(x+h)^2} + \sqrt{1-x^2}$, nous obtenons $\frac{u(x+h)-u(x)}{h} = \frac{1-(x+h)^2-(1-x^2)}{h\left(\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2}\right)} = \frac{-2xh-h^2}{h\left(\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}$.
3. Simplifiant par h, il vient $\frac{u(x+h)-u(x)}{h} = \frac{-2x-h}{\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2}}$. Quand h tend vers 0, on obtient $u'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$. On ne peut pas remplacer x par 1, donc u n'est pas dérivable en 1.
4. On a $f = uv$ avec $u(x) = \sqrt{1-x^2}$ et $v(x) = (x+1)$. En appliquant la formule, on obtient $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}(x+1) + 1 \times \sqrt{1-x^2} = \frac{-x(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{(\sqrt{1-x^2})^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x^2-x+1}{\sqrt{1-x^2}}$.
5. $f'(x)$ a le signe de $-2x^2 - x + 1$. Son discriminant est $\Delta = 1 + 8 = 9$, ses racines $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}$, et il est positif entre ses racines car le coefficient de x^2est négatif. On a donc les variations suivantes :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

6. L'aire de APQ est donnée par $f(x)$, elle est maximale pour $x = \frac{1}{2}$, donc quand M est au milieu de $[OB]$. Le triangle APQ est alors équilatéral car la longueur MP vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $AP^2 = AM^2 + MP^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$ donc $AP = AQ = PQ = \sqrt{3}$