Classe de Première 10 **Vendredi 20 avril 2012**

Devoir surveillé de mathématiques n°8

Exercice 1 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points $A(2\,;2)$ et $\Omega(2\,;\,-3)$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Calculer la distance $A\Omega$. Donner une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω passant par A.
3. Déterminer les coordonnées des points de $\mathcal{C}$ situés sur l'axe des abscisses. On nommera B celui dont l'abscisse est négative.
   Soit $H(3\,;5)$
4. Donner une valeur approchée de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}\right)$ au degré près.
5. Donner une équation de la perpendiculaire à (AB) passant par H.

Exercice 2 (10 points)

A et B sont deux points fixes du plan tels que $AB = 10$, et k est un réel, on s'intéresse à l'ensemble E_k des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$. On appelle I le milieu de $[AB]$.

Dans une large mesure, les parties sont indépendantes. On pourra admettre tout résultat donné dans l'énoncé pour poursuivre l'exercice.

Partie A : quelques généralités

1. Démontrer que l'ensemble E_0 est le cercle de diamètre $[AB]$.
2. Rappeler l'expression de $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ en fonction des longueurs MA, MB, AB
3. En écrivant $MA^2 = \overrightarrow{MA}^2$ et $MB^2 = \overrightarrow{MB}^2$, et en introduisant le point I, donnez la démonstration du théorème de la médiane.
4. Déduire des questions 2 et 3 que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - 25$.

Partie B : géométrie

1. En faisant intervenir le point I, démontrer directement que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - 25$.
2. Que peut-on déduire de E_k si $k < -25$? Si $k = -25$?
3. Si $k > -25$, démontrer que E_k est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
4. Retrouver le résultat de la question 1 de la partie A.

Partie C : coordonnées.

On se place dans le repère orthonormal $(A, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i}$ est directement colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

1. Quelles sont les coordonnées des points I et B ?
2. On pose $M(x, y)$. Exprimer $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ en fonction de x et y.
3. En déduire qu'une équation de E_k est $x^2 - 10x + y^2 = k$
4. Retrouver le résultat de la question 3 de la partie B

Exercice 3 (5 points)

Pour chaque affirmation, dite si elle est vraie ou fausse, avec une justification

1. Toute suite bornée est convergente.
2. Toute suite qui n'est pas arithmétique est géométrique.
3. Si (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$, de raison 3, alors la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$ vaut 15400.
4. Si (u_n) est définie par $u_n = 3 + 0{,}8^n$, alors elle tend vers $+\infty$.
5. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites arithmétiques, alors la suite (w_n) définie par $w_n = u_n + v_n$ est aussi une suite arithmétique.