

Exercice 1 (12 points)

Le but de l'exercice est de vérifier, dans un cas particulier, la propriété : « Dans un triangle, le symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté est sur le cercle circonscrit ».

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On donne les points $A(2 ; 6)$, $B(8 ; 2)$ et $C(-3 ; -9)$

1. Faire une figure que l'on complétera par la suite.
2. Γ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 60 = 0$. Déterminer le centre et le rayon de Γ , le tracer. Démontrer que A appartient à Γ (on admettra que B et C appartiennent aussi à Γ).
3. Donner une équation de la droite Δ perpendiculaire à (BC) passant par A .
4. Soit $H(5 ; 3)$. Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC .
5. Vérifier que $A'(7 ; 1)$ est le projeté orthogonal de H sur (BC) .
6. Quelles sont les coordonnées du symétrique de H par rapport à (BC) ? Vérifier l'énoncé proposé.

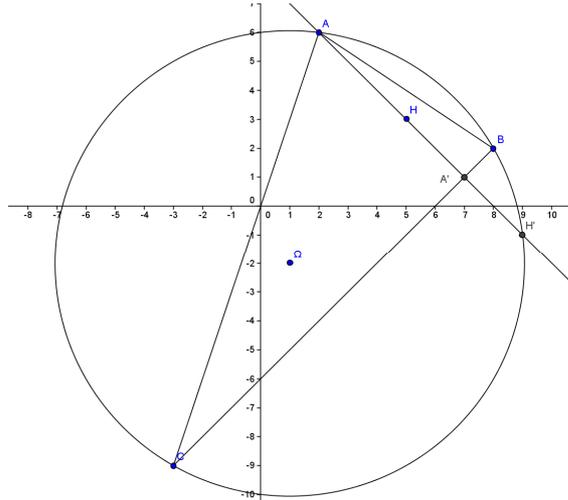
Exercice 2 (8 points)

Le but de l'exercice est de déterminer la valeur exacte du cosinus de $\frac{\pi}{5}$.

1. Pourquoi a-t-on $\cos \frac{4\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5}$?
2. On pose $x = \cos \frac{\pi}{5}$. Exprimer $\cos \frac{2\pi}{5}$ en fonction de x .
3. Exprimer $\cos \frac{4\pi}{5}$ en fonction de $\cos \frac{2\pi}{5}$.
4. Dédurre des questions 1, 2, 3 que $-x = 2(2x^2 - 1)^2 - 1$.
5. Prouver que cette équation est équivalente à $(x + 1)(2x - 1)(4x^2 - 2x - 1) = 0$.
6. Mais combien vaut $\cos \frac{\pi}{5}$?

Exercice 1

1.



2. L'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 60 = 0$ se met sous forme canonique $(x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 - 60 = 0$ soit $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 65$. Γ est donc le cercle de centre $\Omega(1; -2)$ et de rayon $\sqrt{65}$. Si on remplace x par 2 et y par 6, on obtient $1^2 + 8^2 = 1 + 64 = 65$ donc A appartient à Γ .
3. $\overrightarrow{BC}(-11; -11)$. $M(x; y)$ appartient à Δ si et seulement si \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{BC} sont perpendiculaires, donc si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, ce qui s'écrit $-11(x - 2) - 11(y - 6) = 0$ soit $(x - 2) + (y - 6) = 0$. Δ a donc pour équation $x + y = 8$.
4. Comme les coordonnées de H vérifient l'équation de Δ , H est sur la hauteur issue de A du triangle ABC .
Calculons $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{HB}(3; -1)$ et $\overrightarrow{AC}(5; 15)$ donc $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 5 - 15 = 0$. Ainsi (HB) et (AC) sont perpendiculaires et H est sur la hauteur issue de B . Point d'intersection de deux hauteurs, H est bien l'orthocentre du triangle.
5. A' est le projeté de H sur (BC) si et seulement si A' appartient à (BC) et à Δ . $\overrightarrow{A'B}(1; 1)$ et $\overrightarrow{BC}(-11; -11)$ sont colinéaires, donc A' appartient à (BC) . Comme les coordonnées de A' vérifient $x + y = 8$, A' appartient à Δ . A' est bien le projeté de H sur (BC) .
6. Le symétrique de H par rapport à (BC) est aussi son symétrique par rapport à A' , donc $\overrightarrow{HH'} = 2\overrightarrow{HA'}$. $\overrightarrow{HA'}(2; -2)$ donc $\overrightarrow{HH'}(2; -4)$ et $H'(9; -1)$. Comme $(9 - 1)^2 + (-1 + 2)^2 = 64 + 1 = 65$, le symétrique H' de l'orthocentre H du triangle (ABC) est bien sur le cercle circonscrit.

Exercice 2

1. $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$ donc $\cos \frac{4\pi}{5} = \cos \pi \cos \frac{\pi}{5} - \sin \pi \sin \frac{\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5}$.
2. La formule de duplication donne $\cos \frac{2\pi}{5} = 2\cos^2 \frac{\pi}{5} - 1 = 2x^2 - 1$.
3. La même formule donne $\cos \frac{4\pi}{5} = 2\cos^2 \frac{2\pi}{5} - 1$.
4. Finalement, $\cos \frac{4\pi}{5} = 2(2x^2 - 1)^2 - 1$ en remplaçant dans l'égalité du 3 $\cos \frac{2\pi}{5}$ par sa valeur obtenue au 2.
Comme d'après le 1, $\cos \frac{4\pi}{5} = -x$, on a bien $-x = 2(2x^2 - 1)^2 - 1$.
5. On développe les deux côtés. Je laisse la vérification au lecteur.
6. $\cos \frac{\pi}{5}$ est donc une des racines de $(x + 1)(2x - 1)(4x^2 - 2x - 1)$. Il n'est pas égal à -1 ni à $\frac{1}{2}$ qui sont les cosinus de π et $\frac{\pi}{3}$, il est donc racine de $4x^2 - 2x - 1$. Le calcul du discriminant est $\Delta = 4 + 16 = 20$, les racines sont $\frac{2 + \sqrt{20}}{8} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1 - \sqrt{5}}{4}$. Comme $\frac{\pi}{5}$ est entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, son cosinus est positif. Il vaut donc $\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.