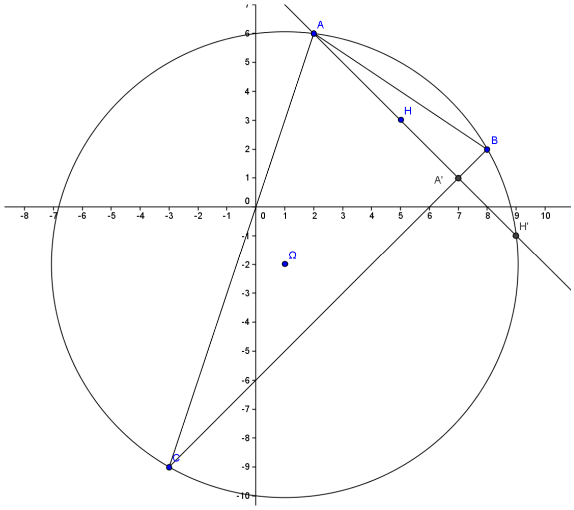
Exercice 1

1.




2. L'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 60 = 0$ se met sous forme canonique $(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 - 60 = 0$ soit $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 65$. $\Gamma$ est donc le cercle de centre $\Omega(1\,;\,-2)$ et de rayon $\sqrt{65}$. Si on remplace $x$ par 2 et $y$ par 6, on obtient $1^2 + 8^2 = 1 + 64 = 65$ donc $A$ appartient à $\Gamma$.
3. $\overrightarrow{BC}(-11\,;-11)$. $M(x\,;y)$ appartient à $\Delta$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont perpendiculaires, donc si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, ce qui s'écrit $-11(x-2) - 11(y-6) = 0$ soit $(x-2) + (y-6) = 0$. $\Delta$ a donc pour équation $x + y = 8$.
4. Comme les coordonnées de $H$ vérifient l'équation de $\Delta$, $H$ est sur la hauteur issue de $A$ du triangle $ABC$.
   Calculons $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC}$ : $\overrightarrow{HB}(3\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(5\,;15)$ donc $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 5 - 15 = 0$. Ainsi $(HB)$ et $(AC)$ sont perpendiculaires et $H$ est sur la hauteur issue de $B$. Point d'intersection de deux hauteurs, $H$ est bien l'orthocentre du triangle.
5. $A'$ est le projeté de $H$ sur $(BC)$ si et seulement si $A'$ appartient à $(BC)$ et à $\Delta$. $\overrightarrow{A'B}(1\,;1)$ et $\overrightarrow{BC}(-11\,;-11)$ sont colinéaires, donc $A'$ appartient à $(BC)$. Comme les coordonnées de $A'$ vérifient $x + y = 8$, $A'$ appartient à $\Delta$. $A'$ est bien le projeté de $H$ sur $(BC)$.
6. Le symétrique de $H$ par rapport à $(BC)$ est aussi son symétrique par rapport à $A'$, donc $\overrightarrow{HH'} = 2\overrightarrow{HA'}$. $\overrightarrow{HA'}(2\,;\,-2)$ donc $\overrightarrow{HH'}(2\,;\,-4)$ et $H'(9\,;\,-1)$. Comme $(9-1)^2 + (-1+2)^2 = 64 + 1 = 65$, le symétrique $H'$ de l'orthocentre $H$ du triangle $(ABC)$ est bien sur le cercle circonscrit.

Exercice 2

1. $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$ donc $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos\pi\cos\frac{\pi}{5} - \sin\pi\sin\frac{\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5}$.
2. La formule de duplication donne $\cos\frac{2\pi}{5} = 2cos^2\frac{\pi}{5} - 1 = 2x^2 - 1$.
3. La même formule donne $\cos\frac{4\pi}{5} = 2cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$.
4. Finalement, $\cos\frac{4\pi}{5} = 2(2x^2-1)^2 - 1$ en remplaçant dans l'égalité du 3 $\cos\frac{2\pi}{5}$ par sa valeur obtenue au 2.
   Comme d'après le 1, $\cos\frac{4\pi}{5} = -x$, on a bien $-x = 2(2x^2-1)^2 - 1$.
5. On développe les deux côtés. Je laisse la vérification au lecteur.
6. $\cos\frac{\pi}{5}$ est donc une des racines de $(x+1)(2x-1)(4x^2-2x-1)$. Il n'est pas égal à $-1$ ni à $\frac{1}{2}$ qui sont les cosinus de $\pi$ et $\frac{\pi}{3}$, il est donc racine de $4x^2 - 2x - 1$. Le calcul du discriminant est $\Delta = 4 + 16 = 20$, les racines sont $\frac{2+\sqrt{20}}{8} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$. Comme $\frac{\pi}{5}$ est entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ , son cosinus est positif. Il vaut donc $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.