Classe de première 10 **Lundi 2 avril 2012**

Devoir surveillé de mathématiques n°7

Dans les deux exercices il y a des questions plus ou moins difficiles, mais l'ordre des questions n'est pas l'ordre de difficulté. Vous pouvez si nécessaire admettre le résultat d'une question et continuer l'exercice.

Exercice 1 (11 points)

On définit la suite $U = (u_n)$ par $u_n = \frac{6}{n^2+3n+2}$ pour tout $n \in \boldsymbol{N}$

1. Calculer u_0, u_1, u_2. La suite U est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. Démontrer que la suite U est majorée par 3 et minorée par 0.
3. Démontrer que pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, $u_n = \frac{6}{n+1} - \frac{6}{n+2}$.
4. Étudier la limite de la suite (u_n).
5. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
6. Pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Calculer S_0, S_1, S_2.
7. Démontrer que la suite (S_n) est croissante.
8. À l'aide de la question 3, démontrer que, pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, $S_n = 6 - \frac{6}{n+2}$.
9. En déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice 2 (9 points)

On définit la suite $U = (u_n)$ par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = 2u_n + n + 1$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3. La suite U est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. On pose maintenant $v_n = u_n + n + 2$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3.
3. Démontrer que, pour tout n, $v_{n+1} = 2v_n$.
4. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
5. Démontrer que, pour tout n, $u_n = 3 \times 2^n - n - 2$.
6. Étudier le sens de variation de U.
7. Calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

Correction du DS suites

Exercice 1 :

1. $u_n = \frac{6}{n^2+3n+2}$ donc $u_0 = \frac{6}{2} = 3, u_1 = \frac{6}{6} = 1, u_2 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Comme $u_2 - u_1 = -\frac{1}{2}$ et $u_1 - u_0 = -2$, elle n'est pas arithmétique. De même $\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2}$ et $\frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{3}$, elle n'est pas géométrique.
2. Pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, $n^2 + 3n + 2 \geq 2$ donc $0 < \frac{1}{n^2+3n+2} \leq \frac{1}{2}$ et par multiplication par 6 $0 < u_n \leq 3$. La suite U est bien majorée par 3 et minorée par 0.
3. Si on met au même dénominateur $\frac{6}{n+1} - \frac{6}{n+2}$, on obtient :
$\frac{6}{n+1} - \frac{6}{n+2} = \frac{6(n+2)-6(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{6}{n^2+3n+2} = u_n$.
4. Comme $n+1$ et $n+2$ tendent vers $+\infty$, $\frac{6}{n+1} - \frac{6}{n+2}$ tend vers 0. u_n a pour limite 0.
5. Le plus simple est de s'intéresser à la fonction $f(x) = \frac{6}{x^2+3x+2}$. Sa dérivée est $f'(x) = \frac{-6(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}$ est négative sur $[0\ ;\ +\infty[$. La fonction f est donc décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ et la suite (u_n) est donc décroissante.
6. $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ donc $S_0 = u_0 = 3, S_1 = u_0 + u_1 = 4$ et $S_2 = 4{,}5$.
7. $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$ donc la suite (S_n) est croissante.
8. D'après la question 3, $u_0 = \frac{6}{1} - \frac{6}{2}$, $u_1 = \frac{6}{2} - \frac{6}{3}$, $u_2 = \frac{6}{3} - \frac{6}{4}$, …, $u_n = \frac{6}{n+1} - \frac{6}{n+2}$. Quand on fait la somme terme à terme, presque toutes les fractions s'éliminent car elles sont à la fois en + et en -. Il ne reste que $S_n = 6 - \frac{6}{n+2}$.

Exercice 2

1. $u_1 = 2u_0 + 0 + 1 = 3$, $u_2 = 2u_1 + 1 + 1 = 8$, $u_3 = 2u_2 + 2 + 1 = 19$. Comme dans l'exercice précédent, elle n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. $v_0 = u_0 + 0 + 2 = 3$, $v_1 = u_1 + 1 + 2 = 6$, $v_2 = u_2 + 2 + 2 = 12$, $v_3 = u_3 + 3 + 2 = 24$.
3. Pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1} + (n+1) + 2 = 2u_n + n + 1 + n + 1 + 2$ ce qui donne $v_{n+1} = 2u_n + 2n + 4 = 2(u_n + n + 2) = 2v_n$.
4. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 2, donc pour tout n, $v_n = 3 \times 2^n$.
5. Comme $v_n = u_n + n + 2$, on a $u_n = v_n - n - 2 = 3 \times 2^n - n - 2$.
6. $u_{n+1} - u_n = 3 \times 2^{n+1} - (n+1) - 2 - (3 \times 2^n - n - 2) = 3 \times 2^{n+1} - 3 \times 2^n - 1$. On peut donc écrire $u_{n+1} - u_n = 3 \times 2^n(2-1) - 1 = 3 \times 2^n - 1$. Comme pour tout n, $2^n \geq 2$, $3 \times 2^n \geq 3$ et $u_{n+1} - u_n \geq 2$ La suite U est croissante.
7. $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = v_0 - 2 + v_1 - 3 + v_2 - 4 + \cdots + v_n - (n+2)$. Cette somme se décompose en la somme d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique : $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = 3\frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 3 \times 2^{n+1} - 3$ et $-2 - 3 - 4 - \cdots - (n+2) = -\frac{(2+n+2)(n+1)}{2} = -\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ (il y a $n+1$ termes, le premier est 2 et le dernier $n+2$). On a finalement $S = 3 \times 2^{n+1} - 3 - \frac{(n+1)(n+4)}{2}$