Classe de Première 10 **Mardi 17 janvier 2012**

Devoir surveillé de mathématiques n°5

Exercice 1 (7 points)

A traiter sans calculatrice et à rendre avant de continuer le contrôle.
Quand une unité d'angle n'est pas précisée, il s'agit du radian
Aucune justification n'est demandée. Répondre directement sur la feuille.

1. Donner la mesure principale en radians des angles suivants :

   120° $\quad \frac{5\pi}{3} \quad \frac{-7\pi}{4} \quad -121\pi \quad 5$

2. Donner la valeur exacte de :

   $\cos\frac{7\pi}{6} \quad \sin\frac{3\pi}{4} \quad \cos 11\pi \quad \sin\frac{2\pi}{3} \quad \sin\frac{3\pi}{2}$

3. Exprimer à l'aide de $\sin x$ ou $\cos x$ les nombres :

   $\sin(x+\pi) \quad \cos(-x) \quad \sin(-x) \quad \cos(\pi - x)$

NOM

Classe de Première 10 **Mardi 17 janvier 2012**

Devoir surveillé de mathématiques n°5

Exercice 1 (7 points)

A traiter sans calculatrice et à rendre avant de continuer le contrôle.
Quand une unité d'angle n'est pas précisée, il s'agit du radian
Aucune justification n'est demandée. Répondre directement sur la feuille.

1. Donner la mesure principale en radians des angles suivants :

   150° $\quad \frac{7\pi}{6} \quad \frac{-5\pi}{4} \quad -120\pi \quad 7$

2. Donner la valeur exacte de :

   $\cos\frac{7\pi}{3} \quad \sin\frac{5\pi}{4} \quad \sin\frac{13\pi}{2} \quad \sin\frac{7\pi}{6} \quad \cos\frac{3\pi}{2}$

3. Exprimer à l'aide de $\sin x$ ou $\cos x$ les nombres :

   $\cos(x+\pi) \quad \cos(-x) \quad \sin(-x) \quad \sin(\pi - x)$

NOM

Exercice 2 (4 points)

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan, exprimer (sans justification) la valeur des angles $(\vec{v},\vec{u})$, $(\vec{u},-\vec{v})$ et $(-\vec{u},-\vec{v})$ en fonction de $(\vec{u},\vec{v})$.

ABC est un triangle.

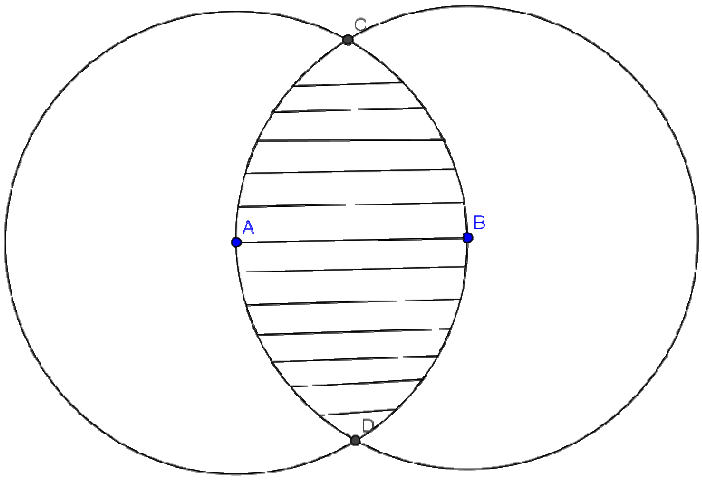
2. Démontrer que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+2k\pi$.
3. En déduire la valeur de $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$.
4. Faire une figure. Quel théorème venez-vous de démontrer ?

Exercice 3 (4 points)

Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle indiqué :

1. $2\sin(2x)=1$ sur $[0\,;2\pi[$
2. $\cos(x)\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $]-\pi\,;\,\pi]$
3. $\cos^2 x+\cos x-2=0$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 (5 points)



Dans la figure ci-dessus, on a construit un segment $[AB]$ de longueur R, le cercle de centre A passant par B et le cercle de centre B passant par A se coupent en C et D.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ? En déduire $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}\right)$.
2. Quel est le périmètre de la zone hachurée ?
3. Quelle est l'aire de la zone hachurée ?

Correction du DS : Trigo
Exercice 2
$(\vec{v},\vec{u}) = -(\vec{u},\vec{v}) + 2k\pi$, $(\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi + 2k\pi$ et $(-\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + 2k\pi$
$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})$ d'après la propriété $(-\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v})$ donc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) + 2k\pi$ d'après la relation de Chasles.
On a donc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA})$ ce qui s'écrit $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) = \pi + 2k\pi$.
On vient de démontrer que la somme des angles d'un triangle est égale à π (ou 180°).

Exercice 3
$2\sin(2x) = 1$ équivaut à $\sin(2x) = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ soit $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, donc $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$. Les solutions sur $[0\,;2\pi[$ sont donc $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$
$\cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ a pour solution les angles correspondant aux points du cercle trigonométrique à gauche de la droite d'équation $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc sur $]-\pi\,;\,\pi]$ la solution est $]-\pi\,;\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{4}\,;\,\pi]$
$\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$: posons $X = \cos x$, on obtient $X^2 + X - 2 = 0$, équation du second degré de solutions 1 et -2. Comme $X = \cos x$ est compris entre -1 et 1, il ne reste que $cos\ x = 1$ donc $x = 2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$

Exercice 4
AB, AC, BC sont trois rayons de deux cercles de même rayon, ils sont égaux et ABC est un triangle équilatéral, et aussi ABD. On a donc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}$ donc $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}) = \frac{2\pi}{3}$ et de même $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}) = -\frac{2\pi}{3}$.
Le périmètre d'un arc de cercle est égal au rayon multiplié par l'angle en radians. Ici il y a deux angles de $\frac{2\pi}{3}$ et le périmètre de la zone hachurée vaut $\frac{2\pi}{3}R$
Pour trouver l'aire, il faut ajouter l'aire des deux secteurs circulaires, et enlever l'aire du losange $ADCB$ qui a été comptée deux fois. L'aire des secteurs vaut la moitié du carré du rayon fois l'angle, donc $\frac{\pi}{3}R^2$ ($\times$ 2 car il y a deux secteurs) et l'aire du losange deux fois l'aire du triangle équilatéral ABC de base $AB = R$ et de hauteur $R\frac{\sqrt{3}}{2}$. Finalement l'aire du losange vaut donc $R^2\frac{\sqrt{3}}{2}$ et l'aire hachurée est $R^2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$