Classe de première 10 **Jeudi 26 septembre 2012**

Devoir surveillé de mathématiques n°1

Exercice 1 (7 points)

Les questions sont indépendantes

1. Résoudre dans $\boldsymbol{R}$: $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$
2. Résoudre dans $\boldsymbol{R}\backslash\{0\}$: $x + \frac{1}{x} \geq 5$
3. Donner la forme canonique de $f(x) = -2x^2 - 3x + 5$, en déduire ses variations.
4. Résoudre dans $\boldsymbol{R}^2$: $\begin{cases} x - y = 5 \\ x^2 + y^2 = 97 \end{cases}$

Exercice 2 (9 points)

Le but de l'exercice est d'étudier les tangentes à une parabole.

On appelle f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

1. Mettre f en forme canonique, en déduire les variations de f.
2. Tracer la courbe $\mathcal{P}$ de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
3. Soit $A(0\ ;\ -6)$. Placer A. Si a est un réel, quelle est l'équation de la droite $\mathcal{D}$, passant par A, de coefficient directeur a ?
4. On recherche l'intersection de $\mathcal{D}$ et P. Quelle équation doit-on résoudre ?
5. Montrer que le discriminant de l'équation précédente vaut $\Delta = a^2 + 8a - 20$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $\mathcal{D}$ et P ont un seul point d'intersection.
6. En déduire l'équation des tangentes à $\mathcal{P}$ passant par A, les tracer. Quelles sont les coordonnées du point B, intersection de P et de la droite d'équation $y = 2x - 6$?

Exercice 3 (4 points)

On appelle f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, sans justification.

1. Si $a > 0$ alors f a un maximum.
2. Si $a > 0$ et $c < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions.
3. Si l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, alors a et c sont de signes contraires.
4. Si $a > 0, b > 0, c > 0$ alors pour tout réel x, $f(x) > 0$.

Classe de première 10 **Jeudi 26 septembre 2012**

Devoir surveillé de mathématiques n°1

Exercice 1 (7 points)

Les questions sont indépendantes

1. Résoudre dans $\boldsymbol{R}\backslash\{0\}$: $x+\frac{1}{x}\geq 5$
2. Résoudre dans $\boldsymbol{R}$: $x^4-2x^2-15=0$
3. Résoudre dans $\boldsymbol{R}^2$: $\begin{cases} x-y=5 \\ x^2+y^2=97 \end{cases}$
4. Donner la forme canonique de $f(x)=-2x^2-3x+5$, en déduire ses variations.

Exercice 2 (9 points)

Le but de l'exercice est d'étudier les tangentes à une parabole.

On appelle f la fonction définie par $f(x)=x^2-4x+3$.

1. Mettre f en forme canonique, en déduire les variations de f.
2. Tracer la courbe $\mathcal{P}$ de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$
3. Soit $A(0\,;\,-6)$. Placer A. Si a est un réel, quelle est l'équation de la droite $\mathcal{D}$, passant par A, de coefficient directeur a ?
4. On recherche l'intersection de $\mathcal{D}$ et P. Quelle équation doit-on résoudre ?
5. Montrer que le discriminant de l'équation précédente vaut $\Delta= a^2+8a-20$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $\mathcal{D}$ et P ont un seul point d'intersection.
6. En déduire l'équation des tangentes à $\mathcal{P}$ passant par A, les tracer. Quelles sont les coordonnées du point B, intersection de P et de la droite d'équation $y=2x-6$?

Exercice 3 (4 points)

On appelle f la fonction définie par $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, sans justification.

1. Si $a>0$ et $c<0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions.
2. Si l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions, alors a et c sont de signes contraires.
3. Si $a>0, b>0, c>0$ alors pour tout réel x, $f(x)>0$.
4. Si $a>0$ alors f a un maximum.

Exercice 1

On pose $X = x^2$, on obtient $X^2 - 2X - 15 = 0$, $\Delta = 4 + 15 = 64$, donc il y a deux solutions, $X_1 = \frac{2-8}{2} = -3$ et $X_2 = \frac{2+8}{2} = 5$. Comme $X = x^2$, $X = -3$ n'est pas possible, il reste $x^2 = 5$ et $S = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$.

On met au même dénominateur, on obtient $\frac{x^2+1}{x} > 5$ équivalent à $\frac{x^2-5x+1}{x} > 0$. On résout par un tableau de signes, le numérateur est un trinôme du second degré où le coefficient de x^2 est positif, il est donc positif à l'extérieur de ses racines et négatif à l'intérieurs. Son discriminant vaut 21, ses racines sont $\frac{5-\sqrt{21}}{2}$ et $\frac{5+\sqrt{21}}{2}$. Un tableau de signes donne la solution $\left]0\,;\,\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right[\cup \left]\frac{5+\sqrt{21}}{2}\,;+\infty\right[$.

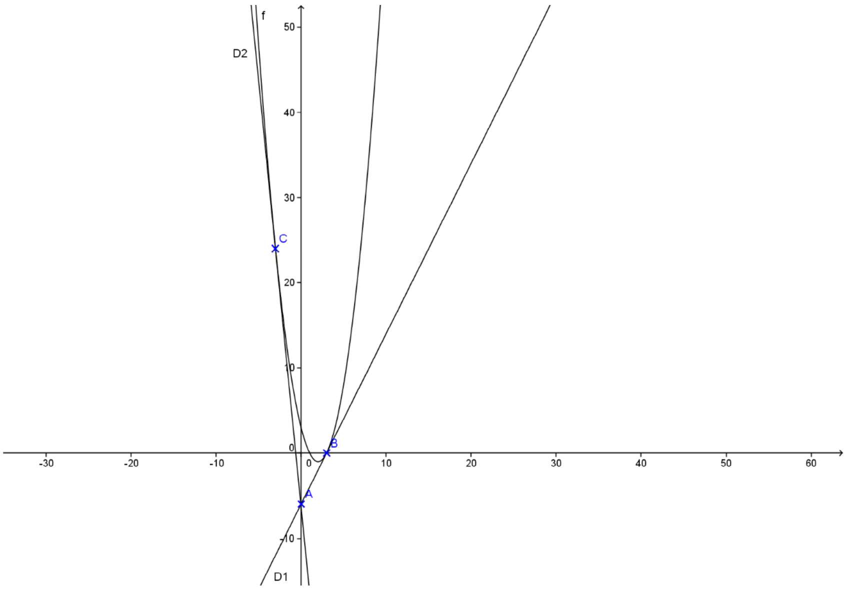
$f(x) = -2x^2 - 3x + 5 = -2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right) = -2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{5}{2}\right]$. Finalement la forme canonique de f est $f(x) = -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{11}{8}$. Le sommet de sa courbe est le point $S\left(-\frac{3}{4}\,;-\frac{11}{8}\right)$, elle est croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{3}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[-\frac{3}{4}\,;\,+\infty\right[$

$\begin{cases} x - y = 5 \\ x^2 + y^2 = 97 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = y + 5 \\ (y+5)^2 + y^2 = 97 \end{cases}$. Développons la deuxième équation, nous obtenons $y^2 + 10y + 25 + y^2 = 97$ soit $2y^2 + 10y - 72 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 100 + 4 \times 2 \times 72 = 676$, il y a donc deux solutions $y_1 = \frac{-10+26}{4} = 4$ et $y_2 = \frac{-10-26}{4} = -9$.

Comme $x = y + 5$, les couples solution sont $S = \{(9\,;4)\,;(-4\,;\,-9\}$

Exercice 2

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1$. f est donc décroissante sur $]-\infty\,;2[$ et croissante sur$]2\,;\,+\infty[$ car le coefficient de x^2 est positif. Le sommet de la parabole est le point $S(2\,;\,-1)$.
2.



3. On connait le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine, la droite $\mathcal{D}$ a pour équation $y = ax - 6$.
4. Les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et P ont leur abscisse solution de l'équation $ax - 6 = x^2 - 4x + 3$, qui s'écrit aussi $x^2 - (4+a)x + 9 = 0$.
5. Le discriminant $\Delta = (a+4)^2 - 4 \times 9 = a^2 + 8a + 16 - 39 = a^2 + 8a - 20$.
Il y a un seul point d'intersection entre $\mathcal{D}$ et P si l'équation $x^2 - (4+a)x + 9 = 0$ a une solution unique, donc si $\Delta = 0$, ce qui s'écrit $a^2 + 8a - 20 = 0$. On calcule le discriminant de cette deuxième équation : $\Delta = 64 + 80 = 144$. Les solutions de cette équation sont $a_1 = \frac{-8+12}{2} = 2$ et $a_2 = \frac{-8-12}{2} = -10$. Ainsi, si a vaut 2 ou -10, $\mathcal{D}$ et P ont un seul point d'intersection.
6. Les tangentes à P passant par A sont donc les deux droites d'équation respectives $y - 2x - 6$ et $y = -10x - 6$.
L'abscisse de B est solution de l'équation $x^2 - 4x + 9 = 2x - 6$, soit $x^2 - 6x + 9 = 0$. Elle vaut donc 3, et $B(3\,;0)$

Exercice 3

Si $a > 0$ alors f a un maximum : c'est FAUX, la parabole est tournée vers le haut

Si $a > 0$ et $c < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions : c'est VRAI, car $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ puisque $ac < 0$

Si l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, alors a et c sont de signes contraires : c'est FAUX puisque par exemple l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ a pour solutions 1 et 2.

Si $a > 0, b > 0, c > 0$ alors pour tout réel x, $f(x) > 0$: c'est FAUX puisque par exemple pour $f(x) = x^2 + 5x + 1$, on a $f(-1) = -3$.