Classe de Première S_1 **Jeudi 21 Octobre 1999**

Devoir de mathématiques

N°6

Exercice 1) (8 points)

ABC est un triangle isocèle en *A*, *I* est le milieu de [*BC*], *G* est le centre de gravité de *ABC*.
1) Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice
2) Montrer que *G* est le barycentre de (A , 1) (I , 2)
3) On appelle *H* le barycentre de (A , 1) (I , 2) (B , 3). Montrer que *H* est le milieu de [*GB*]. Construire *H*.
4) Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points *M* du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}+3\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}-3\overrightarrow{MB}\right\|$.

a) Montrer que *B* appartient à $\mathscr{C}$.

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $\mathscr{C}$ et construire $\mathscr{C}$.

5) Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des points *M* du plan tels que les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ et $\vec{v} = 2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ soient colinéaires.

a) Montrer que *A* appartient à $\mathscr{D}$.

b) Simplifier les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En déduire la nature de $\mathscr{D}$ et construire $\mathscr{D}$.

6) Préciser les éléments communs à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

Exercice 2) (6 points)

On considère un disque plan homogène, de centre *O*, de rayon *R*. *A* est un point de son bord (c'est à dire que $OA = R$). *O*' est le point de [*OA*] défini par $\overrightarrow{OO'} = x\overrightarrow{OA}$. On enlève au disque initial le disque de centre *O*' passant par *A*.
1) a)Faire une figure.
 b) Dans quel ensemble varie *x* ?
2) a) Calculer *O'A* en fonction de *x* et *R*.
 b) *B* est le symétrique de *A* par rapport à *O*'. Exprimer $\overrightarrow{OB}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$.
3) On appelle *G* le centre d'inertie du disque troué. Montrer que $\overrightarrow{OG} = \frac{-(1-x)^2}{2-x}\overrightarrow{OA}$.
4) Peut-on déterminer *x* pour que *G* soit en *B* ? Montrer qu'alors *x* est égal au rapport des aires des deux disques.

Exercice 3) (6 points)

ABC est un triangle. Les points *D* et *E* sont définis par $\overrightarrow{DB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$
1) Faire une figure.
2) Exprimer *D* et *E* comme barycentres respectifs de *A* et *B*, *B* et *C*.
3) *I* est le point d'intersection de (*AE*) et (*CD*). On veut exprimer *I* comme barycentre de *A*, *B* et *C*. Pour cela, on pose $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AE}$.

a) Montrer que $\overrightarrow{IC} = (1-\frac{2}{5}x)\overrightarrow{AC}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ID} = -\frac{2}{5}x\overrightarrow{AC}+(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}x)\overrightarrow{AB}$

b) En écrivant que $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont colinéaires, déterminer *x*.

c) En déduire que *I* est barycentre de (A , 3) (B , 6) (C , 4).

4) La droite (*BI*) recoupe (*AC*) en *F*. Préciser la position de *F* sur (*AC*).