Classe de première S_7 ***Lundi 28 avril 2003***

Devoir de mathématiques

N°13

Exercice 1) D'après baccalauréat, mathématiques élémentaires, 1958 (6 points)

Soit un triangle *ABC* rectangle en *A*. Sur la perpendiculaire en *B* au plan (*ABC*) on prend un point *S* distinct de *B*.

1) Faire une figure claire que l'on complétera par la suite.
2) Démontrer que la droite (AC) est perpendiculaire au plan (BAS).
3) Quelle est la nature du triangle SAC ?
4) On considère le plan *P*, passant par *B* et perpendiculaire à (*SC*).
   Ce plan coupe (*SA*) en *A'* et (*SC*) en *C'*. Démontrer que (*BA'*) est perpendiculaire à (*SAC*).
   Quelle est la nature du triangle *A'BC'* ?
5) Montrer que (*C'A'*) et (*CA*) sont parallèles.
6) Prouver, en utilisant les résultats précédents, qu'il existe une sphère passant par les 5 points *B*, *A*, *A'*, *C*, *C'*. Préciser son centre.

Exercice 2) (6 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. *A*, *B* et *C* ont pour coordonnées respectives $A(0;0;5)$, $B(2;3;5)$, $C(2;0;2)$.

1) Calculer les longueurs des côtés du triangle *ABC*. Que peut-on en conclure ?
2) Donner une équation de la sphère de centre *A*, passant par *B*.
3) Montrer qu'une équation du cône d'axe (*O* ; *z*) passant par *C* est $x^2+y^2=z^2$.
4) Donner une équation du cylindre d'axe (*O* ; *z*) de rayon 5. Montrer que *B* est un point d'intersection du cône et du cylindre. Déterminer l'intersection du cône et du cylindre. Déterminer l'intersection du cône et de la sphère.

Exercice 3) D'après bac S, 2001 (8 points)

A, *B*, *C* sont 3 points non alignés de l'espace. A tout réel *k* on associe le barycentre G_k du système $\{(A;k^2+1),(B;k),(C,-k)\}$. On appelle *I* le milieu de [*BC*].

1) Montrer que $\overrightarrow{AG_k}=\dfrac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$. En déduire que G_k appartient à une droite fixe.
2) Montrer que $G_1G_{-1}CB$ est un parallélogramme. Quel est le milieu de $[G_1G_{-1}]$?
3) Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}$ des points *M* de l'espace tels que :
   $$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$
4) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des points *M* de l'espace tels que :
   $$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$
5) On se place dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne $A(0;0;2)$, $B(-1;2;1)$, $C(-1;2;5)$. Déterminer les coordonnées de G_1 et G_{-1}.
6) Montrer que les ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ sont sécants, donner le rayon de leur cercle intersection.