Classe de Première S_7 ***Lundi 16 décembre 2002***

Devoir de mathématiques

N°8

On considère la fonction f_k définie pour $x \neq -k$ par $f_k(x) = x - 1 + \dfrac{k}{x+k}$, k désignant un réel fixé, c'est à dire qu'à chaque valeur de k correspond une fonction. On appelle $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de f_k. Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_4$, $\mathscr{C}_{-2}$, $\mathscr{C}_{-4}$ ont été tracées ci-dessous.

1) Quelle est la nature de $\mathscr{C}_0$? Dans toute la suite on suppose $k \neq 0$.
2) Etudier les limites de f_k en $+\infty$ et $-\infty$.
3) Etudier les limites de f_k en $-k$ à gauche et à droite (on distinguera $k > 0$ et $k < 0$)
4) Montrer que $\mathscr{C}_0$ est asymptote à toutes les courbes $\mathscr{C}_k$. Préciser leurs positions relatives.
5) Montrer que pour $x \neq -k$, $f_k'(x) = \dfrac{(x+k)^2 - k}{(x+k)^2}$. Etudier les variations de f_k (on distinguera $k > 0$ et $k < 0$). Reconnaître les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_4$, $\mathscr{C}_{-2}$ $\mathscr{C}_{-4}$ sur le graphique.
6) Montrer que l'origine appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_k$. Donner le coefficient directeur de la tangente en O à $\mathscr{C}_k$.
7) On suppose $k > 0$.
   a) Montrer que f_k admet deux extremums $a_k = -k - \sqrt{k}$ et $b_k = -k + \sqrt{k}$, et vérifier les égalités $f_k(a_k) = -(\sqrt{k} + 1)^2$ et $f_k(b_k) = -(\sqrt{k} - 1)^2$.
   b) On appelle A_k et B_k les points de $\mathscr{C}_k$ d'abscisse respectives a_k et b_k. Montrer que ces points sont situés sur la droite d'équation $y = 2x - 1 + k$. En déduire que les droites (A_kB_k) sont toutes parallèlles entre elles .
8) On suppose $k < 0$. Montrer que $\mathscr{C}_k$ admet deux points E_k et F_k où la tangente admet un coefficient directeur égal à 2. Prouver que toutes les droites (E_kF_k) sont parallèles à l'axe des abscisses.
9) Vérifier les résultats précédents sur le graphique.