Classe de première S_5 ***Mardi 12 février 2002***

Devoir de mathématiques

N°12

Exercice1) (9 points)
A traiter sans calculatrice avant de poursuivre le contrôle
Les questions sont indépendantes.

1) A, B et C sont trois points tels que AB = 5, AC = 8, et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 20$

a) Quelle est la valeur de $\widehat{BAC}$?

b) Calculez BC.

c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

d) Soit *I* le milieu de [*BC*]. Montrer que, pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = MI^2 - \frac{BC^2}{4}.$$

e) En déduire l'ensemble $\mathscr{C}$ des points *M* du plan tels que $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 20$

2) a) Rappeler les formules de duplication donnant $\cos(2a)$

b) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$.

3) Montrer que pour tout *x*, $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation sin(3*x*) + sin(2*x*) + sin*x* = 0

Exercice 2) (5 points)
$\mathscr{C}$ est un cercle de centre *O* et de rayon *r*. On place sur $\mathscr{C}$ quatre points *A*, *A'*, *B*, *B'* tels que les droites (*AA'*) et (*BB'*) soient orthogonales, et on appelle *I* leur point d'intersection.
On appelle *A''* le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à *A*.

1) Faire une figure

2) Montrer que $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA''} = IO^2 - r^2$

3) En déduire la valeur de $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA'}$. Combien vaut $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IB'}$?

4) Calculer $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}).\overrightarrow{A'B'}$. En déduire que la médiane issue de *I* du triangle *IAB* est aussi une hauteur du triangle *IA'B'*.

Exercice 3) (6 points)
$\mathscr{C}$ est un cercle de centre *O* et de rayon *R*, *A* est un point donné vérifiant $OA = \frac{R}{2}$. On construit un triangle rectangle *AMN*, avec *M* et *N* sur $\mathscr{C}$.Le but de l'exercice est de déterminer le lieu du milieu *I* de [*MN*]. On note *J* le milieu de [*OA*]

1) Faire une figure.

2) a) Démontrer que $IO^2 + IA^2 = 2IJ^2 + \frac{R^2}{8}$.

b) Démontrer que $IO^2 = R^2 - IN^2 = R^2 - IA^2$.

c) En déduire que *I* appartient au cercle $\mathscr{C}'$ de centre *J* de rayon $\frac{R\sqrt{7}}{4}$.

3) Etude de la réciproque.

a) Montrer que $\mathscr{C}'$ est intérieur à $\mathscr{C}$.

b) Soit *I* un point de $\mathscr{C}'$. Montrer que la perpendiculaire à (*OI*) en *I* coupe $\mathscr{C}$ en deux points *M* et *N* qui vérifient les hypothèses du problème. Conclure.