Classe de première S_5

Corrigé du devoir n°12

Remarques générales :
L'exercice 1 a été passablement traité (moyenne : 4,5/9), vous connaissez à peu près les formules du cours. Il y a cependant des problèmes en trigonométrie, et des confusions. Aussi pas mal de difficultés à appliquer le cours pour faire des démonstrations simples.
D'autre part, quand une réponse est donnée, il faut la justifier avec plus de soin que si vous devez la trouver par vous même.
Les exercices 2 et 3 ont été beaucoup moins bien traités, vous avez des difficultés à voir les liens entre les différentes questions. Toujours les mêmes problèmes pour écrire des démonstrations qui tiennent la route, c'est à dire où tous les arguments figurent, dans l'ordre logique. L'étude du problème réciproque n'a presque pas été faite.
Moyenne du DS : 9,6/20

Exercice 1)

1) A, B et C sont trois points tels que $AB=5, AC=8, \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=20$.

a) Par définition, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$ donc $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\dfrac{20}{8\times 5}=\dfrac{1}{2}$. Il s'ensuit que $\widehat{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$. Il n'y a pas de problème de signe, c'est un angle géométrique.

b) D'après la formule d'Al Kashi, $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=49$ donc $BC=7$.

c) Il y avait beaucoup de méthodes. La plus simple était d'écrire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=BA^2+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=AB^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=28-20=5$.

d) I est le milieu de $[BC]$ et M un point du plan. On a :
$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC})=MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC})+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}$.
Comme I est le milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}=-\overrightarrow{IB}^2=-\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)^2=-\dfrac{BC^2}{4}$ d'où le résultat.

e) Un point M appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=20$, ce qui, d'après la question précédente, équivaut à $MI^2-\dfrac{BC^2}{4}=20$, soit à $MI^2=20+\dfrac{BC^2}{4}=\dfrac{129}{4}$. $\mathscr{C}$ est donc le cercle de centre I et de rayon $\dfrac{\sqrt{129}}{2}$. Comme $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=20$, A appartient à $\mathscr{C}$. On peut donc aussi dire que $\mathscr{C}$ est le cercle de centre I passant par A.

2) a) $\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$.

b) Posons dans cette égalité $a=\dfrac{\pi}{8}$, donc $2a=\dfrac{\pi}{4}$ et $\cos 2a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On obtient :

$2\cos^2\dfrac{\pi}{8}-1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\cos^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1\right)=\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}$ et $\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ car $\dfrac{\pi}{8}$ est dans le premier quadrant, son cosinus est donc positif.

3) Pour tout réel x, $\sin(3x)=\sin(2x+x)=\sin(2x)\cos x+\cos(2x)\sin x$.
Comme il est bien connu que $\sin 2x=2\sin x\cos x$ et $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, on obtient que :

$$\sin(3x)=2\sin x\cos x\cos x+(1-2\sin^2 x)\sin x$$
$$=2\sin x(1-\sin^2 x)+(1-2\sin^2 x)\sin x=4\sin x-3\sin^3 x$$

L'équation $\sin(3x)+\sin(2x)+\sin x=0$ est donc successivement équivalente à :

$3\sin x - 4\sin^3 x + 2\sin x\cos x + \sin x = 0$

$\sin x(-4\sin^2 x + 2\cos x + 4) = 0$

$\sin x(-4(1-\cos^2 x) + 2\cos x + 4) = 0$

$\sin x(4\cos^2 x + 2\cos x) = 0$

$2\sin x\cos x(2\cos x + 1) = 0$

$\sin x = 0$ ou $\cos x = 0$ ou $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

Ses solutions dans ℝ sont donc $0, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}, \pi, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{2}$, tout cela mod 2π.

Exercice 2)

4 points *A*, *A'* , *B*, *B'* sont situés sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre *O* et de rayon *r*, de façon que (*AA'*) et (*BB'*) soient perpendiculaires et sécantes en *I*. *A''* est le point diamétralement opposé à *A*.

2) $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IA''} = (\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA''}) = IO^2 + \overrightarrow{IO}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA''}) + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA''}$. Or *O* est le milieu de [*AA''*], donc $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA''} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA''} = -\overrightarrow{OA}^2 = -r^2$. On a bien $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IA''} = IO^2 - r^2$.

3) Le triangle *AA'A''* est rectangle en A', donc $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IA'} = \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IA''} = OI^2 - r^2$ car *A'* est le projeté de *A''* sur (*IA*). On peut faire la même démonstration en considérant le point *B''*, diamétralement opposé à *B*, et on obtient que $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IB'} = OI^2 - r^2$.

4) $(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})\cdot\overrightarrow{A'B'} = (\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})\cdot(\overrightarrow{A'I}+\overrightarrow{IB'}) = \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{A'I} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{A'I} + \overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IB'}$. On a calculé ci dessus $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IB'} = OI^2 - r^2$, $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{A'I} = -\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IA'} = -OI^2 + r^2$, et les deux autres produits scalaires sont nuls car (*AA'*) et (*BB'*) sont perpendiculaires. $(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})\cdot\overrightarrow{A'B'}$ est donc égal à 0, ce qui veut bien dire que (comme $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IM}$ avec *M* milieu de [*AB*]) que la médiane (*IM*) de *IAB*, orthogonale à (*A'B'*), est une hauteur du triangle *IA'B'*.

Exercice 3)

$\mathscr{C}$ est un cercle de centre *O* et de rayon *R*, *A* est un point tel que $OA = \dfrac{R}{2}$, *J* est le milieu de [*OA*], *M* et *N* sont deux points de $\mathscr{C}$, avec le triangle *AMN* rectangle en *A*, *I* est le milieu de [*MN*]. On recherche le lieu de *I*.

2) a) D'après le théorème de la médiane dans le triangle *IOA*, *J* est le milieu de [*OA*] donc $IO^2 + IA^2 = 2IJ^2 + \dfrac{OA^2}{2} = 2IJ^2 + \dfrac{R^2}{8}$.

b) Le triangle *OMN* est isocèle en *O* (*OM* et *ON*) sont deux rayons du cercle) donc le triangle *OIN* est rectangle en *I*, donc $ON^2 = OI^2 + IN^2$, donc $IO^2 = R^2 - IN^2$. *I* est le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle *AMN*, c'est donc aussi le centre de son cercle circonscrit, donc *IA* = *IN*, et on a bien $IO^2 = R^2 - IN^2 = R^2 - IA^2$

c) D'après les deux résultats précédents, on peut exprimer IJ^2 :

$2IJ^2 = IO^2 + IA^2 - \dfrac{R^2}{8} = R^2 - IA^2 + IA^2 - \dfrac{R^2}{8} = \dfrac{7R^2}{8}$ donc $IJ = \dfrac{\sqrt{7}}{4}R$. *I* appartient donc au cercle $\mathscr{C}'$ de centre *J* et de rayon $\dfrac{\sqrt{7}}{4}R$.

3) Etude de la réciproque.

a) Le centre *J* de $\mathscr{C}'$ est intérieur à $\mathscr{C}$, et la somme de la distance *OJ* ($\dfrac{1}{4}R$) et du rayon de $\mathscr{C}'$ ($\dfrac{\sqrt{7}}{4}R$) est inférieure à *R* (car $\sqrt{7} < 3$ donc $\dfrac{1+\sqrt{7}}{4} < 1$. $\mathscr{C}'$ est donc intérieur à $\mathscr{C}$.

b) Soit *I* un point de $\mathscr{C}'$. La perpendiculaire à (*OI*) en *I* coupe donc $\mathscr{C}$ en deux points *M* et *N*. Comme *I* est le pied de la hauteur du triangle isocèle *OMN*, il est aussi le milieu de [*MN*]. Reste à prouver que le triangle *AMN* est rectangle en *A*, et pour cela nous allons montrer que *AI* = *IN*.

On sait que $OI^2 + IA^2 = 2IJ^2 + \dfrac{OA^2}{2} = 2\dfrac{7R^2}{16} + \dfrac{R^2}{8} = R^2$ (c'est le théorème de la médiane dans le triangle *IOA*), et que $OI^2 + IN^2 = ON^2 = R^2$ (c'est le théorème de Pythagore dans le triangle *OIN* rectangle en *I*). On a bien *IA* = *IN*, donc le triangle *IAN* est rectangle en *A* puisque *I*, milieu d'un de ses côtés, en est aussi le centre du cercle circonscrit. On a bien prouvé qu'à tout point *I* de $\mathscr{C}'$ on pouvait associer deux points *M* et *N* de $\mathscr{C}$, de façon que *I* soit le milieu de [*MN*] et que le triangle *AMN* soit rectangle en *A*. Le lieu de *I* est donc le cercle $\mathscr{C}'$, de centre *J* et de rayon $\dfrac{\sqrt{7}}{4}R$.