

Devoir de mathématiques

N°13

L'usage des calculatrices est totalement prohibé

Exercice 1) 3 points

- a) Donner les valeurs exactes de $\cos \frac{2\pi}{3}$, $\sin \frac{5\pi}{4}$, $\cos 131\pi$
- b) Donner les formules de transformation $\cos(\pi + x)$, $\sin(\pi - x)$, $\cos(x + \frac{\pi}{2})$
- c) Donner les formules $\cos(a + b)$, $\sin(a - b)$, $\cos(2a)$ (3 formules), $\sin(2a)$

Exercice 2) (3 points)

Montrer les égalités suivantes :

- a) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$
- b) $(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = \cos 2x$
- c) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$
- d) $\cos^2 x - \cos^2 y = \sin^2 y - \sin^2 x$
- e) $\cos a \sin(b - c) + \cos b \sin(c - a) + \cos c \sin(a - b) = 0$

Exercice 3) (2 points)

En employant deux fois la formule de duplication, montrer que :

$$\cos(4x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

Exercice 4) (12 points)

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a , I le milieu de $[BC]$ et D le symétrique de A par rapport à (BC) .

Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice.

- a) Quelle est la nature de $ABDC$?
- b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en fonction de a .
- c) Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \frac{a^2}{2}$? Le représenter.
- d) Montrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{a^2}{2}$
- e) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = MA^2$. Le représenter.
- g) On appelle G le barycentre de $(A, 2)$ $(B, 1)$ $(C, 1)$. Montrer que G est le milieu de $[AI]$.
- h) On définit, pour tout point M du plan, $f(M) = MA^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$.

Montrer que $f(M) = f(G) + 2MG^2$

Calculer $f(A)$, en déduire $f(G)$ et la nature des lignes de niveau de f .

Pour quelle valeur de k la ligne de niveau k de f passe-t-elle par B ?