Classe de première S_7 ***Lundi 18 novembre 2002***

Devoir de mathématiques

N°6

Exercice 1)(6 points)

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a, I le milieu de $[BC]$, et D le symétrique de A par rapport à (BC).

1) Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.
2) Quelle est la nature de $ABDC$?
3) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$ en fonction de a.
4) Pour tout point M du plan, montrer que $\overrightarrow{MB} \bullet \overrightarrow{MC} = MI^2 - \frac{a^2}{2} = MA^2 + \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{AD} + \frac{a^2}{2}$.
5) En déduire l'ensemble E des points M du plan tels que $\overrightarrow{MB} \bullet \overrightarrow{MC} = \frac{a^2}{2}$ et l'ensemble F des points M du plan tels que $\overrightarrow{MB} \bullet \overrightarrow{MC} = MA^2$.

Exercice 2)(7 points)

On appelle x et y les réels suivants : $x = \cos\frac{\pi}{5}, y = \sin\frac{\pi}{5}$.

1) Montrer que $\cos\frac{2\pi}{5} = 1 - 2y^2, \sin\frac{2\pi}{5} = 2xy, \sin\frac{3\pi}{5} = y(4x^2 - 1)$
2) Montrer que $\sin\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{3\pi}{5}$ et en déduire que x vérifie l'équation $4x^2 - 2x - 1 = 0$.
3) En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{5}, \cos\frac{2\pi}{5}, \sin\frac{\pi}{5}$
4) Justifier la construction suivante pour un pentagone régulier : $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O, $[AA']$ et $[BB']$ sont deux diamètres perpendiculaires de $\mathscr{C}$. I est le milieu de $[A'O]$, le cercle de centre I, passant par B, coupe $[OA]$ en J, K est le milieu de $[OJ]$. La perpendiculaire à (OA) en K coupe $\mathscr{C}$ en C et C'. $[AC]$ est un des côtés du pentagone.
5) Déterminer le côté et l'apothème du pentagone régulier convexe en fonction du rayon de son cercle circonscrit.

Note à l'usage des incultes : l'apothème d'un polygone régulier est la distance du centre du cercle circonscrit au milieu d'un côté. C'est aussi le rayon du cercle inscrit.

Exercice 3 (7 points)

$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon R et A un point donné tel que $OA = 2R$. Une droite d variable passant par A et distincte de (OA) coupe $\mathscr{C}$ en B et C. Les tangentes à $\mathscr{C}$ menées par B et C se coupent en M. La droite (OM) coupe (BC) en I et M se projette en H sur (OA).

1) Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.
2) Quels sont les éléments fixes et les éléments mobiles du problème ?
3) Démontrer que $\overrightarrow{OH} \bullet \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{OI}$.
4) Démontrer que $\overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{OB} = OB^2$
5) En déduire que $\overrightarrow{OH} \bullet \overrightarrow{OA} = R^2$ et que H est un point fixe que l'on précisera.
6) En déduire que M appartient à une droite Δ fixe quand d varie.
7) Le lieu de M est-il la droite Δ ?