Classe de première S_5 ***Mardi 21 mai 2002***

Devoir de mathématiques

N°18

Exercice 1)(10 points)

On définit une suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n - 1 \end{cases}$

1) Montrer que $u_1 = -\dfrac{1}{2}, u_2 = -\dfrac{1}{4}, u_3 = \dfrac{7}{8}$. La suite (u_n) est-elle géométrique, arithmétique ?
2) On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 2n + 6$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3.
3) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
4) En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.
5) Quelle est la limite de (v_n) ? Celle de (u_n) ?
6) Calculer $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.
7) Calculer $S_n^{'} = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

Exercice 2)(10 points)

On appelle f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 4}{x}$.

1) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$ de f ?
2) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$. Préciser leurs positions relatives.
3) Etudier les variations de f.
4) Tracer Δ et $\mathscr{C}$ dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.
5) Soit a appartenant à $]0\,;+\infty[$ et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a. Montrer que la tangente T à $\mathscr{C}$ en A a pour équation $y = \dfrac{a^2 - 4}{a^2}x + \dfrac{a+8}{a}$.
6) On appelle I le point de coordonnées $I(0\,;1)$.Déterminer en fonction de a les coordonnées du point J, intersection de T et de l'axe des ordonnées, et du point K, intersection de T et Δ. Montrer que l'aire du triangle IJK ne dépend pas de a.