Classe de 1ère S5

Corrigé du DS 18

Exercice 1)

1) (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \end{cases}$ donc :

$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 0 - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}, u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 - 1 = -\frac{1}{4}, u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 2 - 1 = -\frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8}$.

La suite n'est ni arithmétique, ni géométrique, car les différences $u_1 - u_0$ et $u_2 - u_1$ sont différentes, de même que les quotients $\frac{u_1}{u_0}$ et $\frac{u_2}{u_1}$.

2) $v_n = u_n - 2n + 6$ donc :

$v_0 = u_0 + 6 = 7, v_1 = u_1 - 2 + 6 = \frac{7}{2}, v_2 = u_2 - 4 + 6 = \frac{7}{4}, v_3 = u_3 - 6 + 6 = \frac{7}{8}$.

3) Pour tout entier n, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2(n+1) + 6 \\ &= \frac{1}{2}u_n + n - 1 - 2n - 2 + 6 \\ &= \frac{1}{2}u_n - n + 3 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 2n + 6) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

4) On a pour tout n, $v_n = v_0 q^n = \frac{7}{2^n}$. D'autre part, on a $v_n = u_n - 2n + 6$ donc $u_n = v_n + 2n - 6$, donc pour tout n $u_n = \frac{7}{2^n} + 2n - 6$.

5) La suite (v_n), géométrique de raison strictement comprise entre –1 et 1, a pour limite 0.
La suite (w_n) définie par $w_n = 2n - 6$, arithmétique de raison positive, a pour limite $+\infty$.
Il en résulte que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ par somme.

6) S, somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique, est égal par théorème à :

$$S = v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 7\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 7 \times 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 14 - \frac{7}{2^n}.$$

7) D'autre part, la somme $w_0 + w_1 + ... + w_n$ est égale à $\frac{w_0 + w_n}{2}(n+1) = (n-6)(n+1)$. En ajoutant les résultats précédents, on trouve que $S' = 14 - \frac{7}{2^n} + (n-6)(n+1)$.

Exercice 2)

La fonction *f* est définie sur]0 ; +∞[par $f(x)=\dfrac{x^2+x+4}{x}$

1) Etude de la limite de *f* en 0 : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2+x+4=4, \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x=0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$.

   On peut en conclure que l'axe des ordonnées est asymptote à $\mathscr{C}$.

   Etude en +∞ : pour tout $x > 0$ on a $f(x)=\dfrac{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2})}{x}=x(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2})$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2})=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2})=+\infty$

2) Calculons l'écart $h(x)=f(x)-(x+1)=\dfrac{x^2+x+4}{x}-\dfrac{x(x+1)}{x}=\dfrac{4}{x}$.

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$, on peut en conclure que Δ est asymptote à $\mathscr{C}$. Comme de plus $h(x)$ est toujours positif (car x est strictement positif), $\mathscr{C}$ est au dessus de Δ.

3) *f* est dérivable sur]0 ; +∞[car c'est un quotient rationnel. Pour tout x positif, on a

   $$f'(x)=\frac{(2x+1)x-(x^2+x+4)}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}.$$

   $f'(x)$ est donc du signe de x^2-4, c'est à dire, x étant positif, que $f'(x)$ est positif sur]2 ; +∞[et négatif sur]0 ; 2[. *f* est donc strictement croissante sur [2 ; +∞[et strictement décroissante sur]0 ; 2]. On a le tableau

x	0		2		+∞
$f'(x)$	||	−	0	+	
f	+∞ ||	↘	5	↗	+∞

4) Laissé au lecteur (regardez votre calculatrice)

5) L'équation d'une tangente est $y=f'(a)(x-a)+f(a)$. Il n'y a plus qu'à substituer. *T* a donc pour équation :

$$y=\frac{a^2-4}{a^2}(x-a)+\frac{a^2+a+4}{a}\Leftrightarrow y=\frac{a^2-4}{a^2}x+\frac{-a(a^2-4)}{a^2}+\frac{a^2+a+4}{a}\Leftrightarrow y=\frac{a^2-4}{a^2}x+\frac{a+8}{a}$$

6) *J* est le point de *T* situé sur l'axe des ordonnées ; Son abscisse est nulle, et son ordonnée est égale à $\dfrac{a+8}{a}$. On a donc $J\left(0\,;\dfrac{a+8}{a}\right)$.

   K est le point d'intersection de *T* et Δ. Pour trouver ses coordonnées, on résout le système

$$\begin{cases}y=x+1\\ y=\dfrac{a^2-4}{a^2}x+\dfrac{a+8}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+1\\ x+1=\dfrac{a^2-4}{a^2}x+\dfrac{a+8}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+1\\ \left(1-\dfrac{a^2-4}{a^2}\right)x=\dfrac{a+8}{a}-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+1\\ \dfrac{4}{a^2}x=\dfrac{8}{a}\end{cases}$$

   On a donc $K\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}+1\right)$

   Le triangle *IJK* a pour base *IJ* et pour hauteur l'abscisse de *K* (puisque (*IJ*) est l'axe des ordonnées). On connaît l'abscisse de *K*, et $IJ=\dfrac{a+8}{a}-1=\dfrac{8}{a}$. L'aire de *IJK* vaut donc $A=\dfrac{1}{2}\dfrac{8}{a}\dfrac{a}{2}=2$. Elle est bien indépendante de *a*.