Classe de Première S_5 ***Mardi 22 janvier 2002***

Devoir de mathématiques

N°10

Exercice 1) (11 points)

On appelle *f* la fonction définie sur [0 ; +∞[par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$.

1) Montrer que *f* est dérivable sur]0 ; +∞[et que $f'(x)=\dfrac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$.
2) Etudier les variations de *f* et en déduire que pour tout réel positif *x* on a $0\le\sqrt{x}\le\dfrac{x+1}{2}$.
3) Montrer que pour tout réel strictement positif *x* on a $f(x)\le\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. En déduire un intervalle sur lequel on a $f(x)\le 10^{-2}$.
4) Tracer la courbe *C* de *f* dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm sur (*Ox*), 5cm sur (*Oy*) (on admettra que la tangente en *O* à *C* est l'axe des ordonnées).
5) On appelle *g* la fonction définie sur]0 ; +∞[par $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$. Etudier les variations de *g*, tracer sa courbe *C'* dans le même repère que *C*.
6) Soit *m* un réel positif. Combien l'équation *g*(*x*) = *m* a-t-elle de solutions ? Etudier le nombre de points d'intersection entre *C* et la droite d'équation *y* = *mx* (on pourra se servir de ce qui précède)

Exercice 2) (9 points)

1) On appelle *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, *a*, *b*, *c*, *d* étant quatre constantes réelles que l'on déterminera en utilisant les conditions suivantes (on appelle *C* la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, on ne cherchera pas à tracer *C*).
   a) *C* passe par *O* et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -6.
   b) La dérivée de *f* s'annule pour les valeurs -1 et 3.

On pourra admettre pour la suite que l'on a $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-2x^2-6x$

2) Donner une équation de la tangente T à *C* en *O*. Préciser la position de *C* par rapport à T.
3) Etudier les variations de *f*.
4) Etudier le signe de *f*(*x*) suivant les valeurs de *x*. En déduire l'étude des variations de la fonction *g* définie sur ℝ par $g(x)=x^4-2x^3-18x^2$ (on ne calculera pas les valeurs des extremums)