Classe de première S₅

Corrigé du Devoir surveillé n°10

Exercice 1

1) La fonction racine est dérivable sur]0 ; +∞[, les fonctions polynômes sont dérivables sur ℝ, f est dérivable donc sur]0 ; +∞[par quotient de fonctions dérivables, et pour tout x on a $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)-\sqrt{x}}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)-2\sqrt{x}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+1)^2}=\dfrac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$.
2) $f'(x)$ est du signe de $1-x$ car son dénominateur est le produit de deux fonctions toujours positives, f est donc croissante sur [0 ; 1] et décroissante sur [1 ; +∞[. Le maximum de f sur [0 ; +∞[est donc $f(1)=\dfrac{1}{2}$, le minimum de f est 0 (il est clair que $f(x)$ est toujours positif, on a donc pour tout x de [0 ; +∞[$0\le f(x)\le\dfrac{1}{2}$, donc, en multipliant cette inégalité par le réel positif $x+1$, on obtient, pour tout x de [0 ; +∞[$0\le\sqrt{x}\le\dfrac{x+1}{2}$.
3) Si $x>0$, $x<x+1$ donc $\dfrac{1}{x+1}<\dfrac{1}{x}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur]0 ; +∞[. En multipliant cette inégalité par le réel positif $\sqrt{x}$, on obtient, pour tout réel strictement positif, $\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}<\dfrac{\sqrt{x}}{x}\Leftrightarrow f(x)<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Pour avoir $f(x)\le 10^{-2}$, il suffit donc d'avoir $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\le 10^{-2}$, ce qui est équivalent à $\sqrt{x}\ge 10^2$ ou $x\ge 10^4$. On a donc $f(x)\le 10^{-2}$ pour tout x appartenant à [10^4, +∞[.
4) Laissé au lecteur.
5) g est la fonction définie sur]0 ; +∞[par $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$. Elle est dérivable sur]0 ; +∞[par quotient de fonctions dérivables, et on a, pour tout réel strictement positif x :
$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{\frac{x(1-x)}{2\sqrt{x}(x+1)^2}-\frac{\sqrt{x}}{x+1}}{x^2}=\frac{\frac{x(1-x)-2x(x+1)}{2\sqrt{x}(x+1)^2}}{x^2}=\frac{-3x^2-x}{2x^2\sqrt{x}(x+1)^2}.$$
Il est clair que $g'(x)$ est négatif pour tout x (car x est strictement positif). g est donc strictement décroissante sur]0 ; +∞[
6) Soit m un réel positif. L'équation $g(x)=m$ a au maximum une seule solution, car g est strictement décroissante. Comme quand x tend vers 0, $g(x)$ tend vers +∞, et que quand x tend vers +∞, $g(x)$ tend vers 0, que de plus g est dérivable donc continue sur]0 ; +∞[, pour tout réel strictement positif m l'équation $g(x)=m$ a une et une seule solution. Si $m=0$, l'équation n'admet pas de solution.
   L'équation $f(x)=mx$ admet 0 pour solution évidente. Si x n'est pas nul, elle est équivalente à $\dfrac{f(x)}{x}=m$, c'est à dire à l'équation précédente. Elle a donc en plus une solution strictement positive si m est différent de 0, et la seule solution 0 si $m=0$. Il y a donc, entre C et la droite d'équation $y=mx$, deux points d'intersection (dont l'origine) si m est différent de 0, et un seul point d'intersection (l'origine) si $m=0$.

Exercice 2)

1) f est définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Les deux conditions s'expriment par :
$f(0) = 0,\ f'(0) = -6,\ f'(-1) = 0,\ f'(3) = 0$. Calculons donc f' : $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

On obtient donc le système : $\begin{cases} d = 0 \\ c = -6 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ c = -6 \\ 3a - 2b = 6 \\ 27a + 6b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ c = -6 \\ L_4 - 9L_3 : 24b = -48 \\ L_4 + 3L_3 : 36a = 24 \end{cases}$.

On obtient $a = \dfrac{2}{3}, b = -2, c = -6, d = 0$ et $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x$.

2) On sait déjà que la tangente à C en O a un coefficient directeur égal à –6, son équation est donc $y = -6x$. Pour étudier la position de C par rapport à T, on étudie le signe de la différence $f(x) - (-6x) = \dfrac{2}{3}x^3 + 2x^2 = \dfrac{2}{3}x^2(x+3)$. Cette différence est du signe de $x + 3$, donc sur $]-\infty\ ;\ -3[$ C est en dessous de T, et sur $]-3\ ;\ +\infty[$ C est au dessus de T. Elles se rencontrent en O et au point $A(-3;-2)$.

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme. Sa dérivée vaut $f'(x) = 2x^2 - 4x - 6$, cette dérivée s'annule pour $x = -1$ et $x = 3$ (voir question 1), elle est négative sur $[-1\ ;\ 3]$ et positive à l'extérieur car le coefficient de x^2 est positif. f est donc croissante sur$]-\infty\ ;\ -1]$ et sur $[3\ ;\ +\infty[$, et décroissante sur $[-1\ ;\ 3]$. $f(-1) = -\dfrac{2}{3} + 2 + 6 = \dfrac{22}{3}$, $f(3) = -18$.

4) $f(x) = x(\dfrac{2}{3}x^2 - 2x - 6)$, étudions le second facteur. C'est un polynôme du second degré, son discriminant vaut $\Delta = 4 + 4 \times \dfrac{2}{3} \times 6 = 20$, ses racines sont donc égales à :
$x_1 = \dfrac{2 - 2\sqrt{5}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3(1-\sqrt{5})}{2}$, $x_2 = \dfrac{2 + 2\sqrt{5}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3(1+\sqrt{5})}{2}$. Il est négatif sur $[x_1\,;x_2]$ et positif à

l'extérieur car le coefficient de x^2 est positif. On le multiplie par x, donc finalement (je ne fais pas le tableau de signe) $f(x)$ est positif sur $[x_1\ ;\ 0]$ et sur $[x_2\ ;\ +\infty[$ et négatif sur $]-\infty\ ;\ x_1]$ et sur $[0\ ;\ x_2]$. La fonction g définie par $g(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme, sa dérivée vaut $g'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 36x = 6f(x)$. Elle est donc du signe de f que l'on vient d'étudier, ainsi g est strictement croissante sur $[x_1\ ;\ 0]$ et sur $[x_2\ ;\ +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ x_1]$ et sur $[0\ ;\ x_2]$.