

Devoir de mathématiques

N°21

Exercice 1

$ABCD A'B'C'D'$ est un parallélépipède ($ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont deux parallélogrammes, et les 4 droites (AA') , (BB') , (CC') , (DD') sont parallèles.

- 1) Montrer que les plans $(A'BD)$ et $(CB'D')$ sont parallèles.
- 2) Montrer que les plans $(A'B'C')$ et $(AB'C)$ sont sécants et déterminer leur intersection.
- 3) Étudier l'intersection de la droite $(A'D)$ et du plan $(CB'D')$.
- 4) a) Soit G l'isobarycentre des points A' , B , D . Montrer que $\overrightarrow{AC'} = 3\overrightarrow{AG}$
 b) Soit G' l'isobarycentre des points C , B' , D' . Montrer que $\overrightarrow{C'A} = 3\overrightarrow{AG'}$
 c) Montrer que les points A , G , G' , C' sont alignés et que les plans $(A'BD)$ et (CBD') partagent $[AC']$ en deux segments de même longueur.

Exercice 2

Soit ABC un triangle rectangle en B , et S un point distinct de A situé sur la perpendiculaire Δ en A au plan (ABC) .

- 1) Montrer que les droites (SB) et (BC) sont perpendiculaires.
- 2) En déduire que les quatre faces du tétraèdre $SABC$ sont des triangles rectangles.
- 3) Soit H le projeté orthogonal de A sur (SB) . Montrer que (AH) est orthogonale au plan (SBC) . Quand S varie sur Δ , sur quelle courbe se déplace H ?

Exercice 3

On définit les trois fonctions f , g , h par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x} \text{ sur } [1, +\infty[,$$

$$g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{2x+3} \text{ sur } [-1, +\infty[,$$

$$h(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-2} \text{ sur }]-3; 2[$$

Pour chacune d'entre elles, étudier ses limites aux bornes de son ensemble de définition, et calculer sa dérivée (on précisera les ensembles de dérivabilité)

Étudier les variations de f .

Exercice 4

Déterminer 2 réels a et b pour que la fonction F définie par $F(x) = a \sin(2x) + b \cos(2x)$ ait pour dérivée la fonction f définie par $f(x) = x \cos(2x)$.

Barème possible : 1) 6 points, 2) 5 points, 3) 7 points, 4) 2 points.