Classe de Première S_2
Correction du devoir n°21

Exercice 1)

Pour prouver que les plans (A'BD) et (CB'D') sont parallèles, cherchons deux sécantes de l'un parallèles à deux sécantes de l'autre.
Beaucoup d'entre vous ont écrit : les deux plans (AA'DD') et (BB'CC') étant parallèles, les droites (A'D) et (B'D') sont parallèles. Leur conclusion est juste, mais la raison est mauvais, ce n'est pas parce que deux plans sont parallèles que n'importe quelle droite de l'un est parallèle à n'importe quelle droite de l'autre. D'autres ont parlé de « parallélogrammes parallèles », et ont dit que la diagonale de l'un était parallèle à la diagonale de l'autre. Ce n'est guère plus convaincant. On disposait de plusieurs méthodes

a) Les droites parallèles (AB) et (C'D') (elles sont parallèles car elles sont toutes deux parallèles à (A'B'), dans les deux parallélogrammes ABB'A' et A'B'C'D') forment un plan, qui rencontre les deux plans parallèles (AA'DD') et (BB'CC') suivant les droites respectives (AD') et (BC') : ces deux droites sont donc parallèles (quand deux plans sont parallèles, ils rencontrent un même troisième suivant des droites parallèles).
b) Les segments [AB] et [C'D'], étant parallèles et de même longueur, forment un parallélogramme ABC'D', donc les deux côtés (AD') et (BC') sont parallèles.
c) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{D'C'}$ sont égaux, donc, par la translation de ce vecteur, A a pour image B et D' a pour image C'. L'image d'une droit par une translation étant une droite parallèle, (AD') et (BC') sont parallèles.

On montre de même que les droites (A'B) et (D'C) sont parallèles.
Quelques-uns ont utilisé la méthode a), un seul la méthode c), et personne la méthode b).
1.25 point pour la démonstration complète, 0.75 pour les gens qui ont affirmé sans le démontrer (ou qui ont utilisé un argument faux) que les droites (AD') et (BC') étaient parallèles.
2) Les plans (A'B'C') et (AB'C) ont B' en commun. Ils ne sont pas confondus car A n'est pas dans (A'B'C'), ils sont donc sécants. 0.5 point
Leur intersection est une droite qui passe par B'. Les droites (AC) et (A'C') sont parallèles (on le démontre comme ci-dessus), et appartiennent respectivement à chacun des plans. D'après le théorème du toit, les deux plans sont donc sécants suivant une parallèle à ces droites, celle qui passe par B'. 1 point.
3) La droite (A'D) est incluse dans le plan (A'BD), qui est parallèle au plan (CB'D'). La droite (A'D) ne rencontre donc pas le plan (CB'D'), leur intersection est vide. 0.5 point.
Remarque : la notion d'intersection est une notion relative aux ensembles, et l'intersection de deux ensembles existe toujours, si elle n'a aucun élément on dit qu'elle est vide.
4) a) D'après la propriété fondamentale du barycentre, on a :
$3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
Or $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ car ABCD est un parallélogramme
Et $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$ par propriété des parallélépipèdes (démonstration du 1)
On obtient bien $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}$ (0.5 point)

b) $3\overrightarrow{C'G'} = \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{C'A}$ pour les mêmes raisons. 0.5 point

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{C'G'}$ étant colinéaires, les points A, G, G' et C' sont alignés.

D'autre part, on a $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{G'C'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC'},$ donc par soustraction $\overrightarrow{\mathrm{GG'}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}$

Comme G est dans (A'BD) et G' dans (CB'D'), les deux plans coupent [AC'] en deux segments de même longueur. 0.5 point.
Figure : 1 point.
Total : 6 points.

Exercice 2

De nombreuses erreurs, dues à l'utilisation de théorèmes faux, en particulier l'usage de plans perpendiculaires, ou à la croyance que si une droite est orthogonale à une droite d'un plan, elle est orthogonale au plan (alors que, étant donnés un plan et une droite *quelconques*, la droite est *toujours* orthogonale à une droite du plan).

1) ABC est rectangle en B, donc (AB) et (BC) sont orthogonales. (AS) est orthogonale à (ABC), donc à toute droite de (ABC), donc à (BC). (BC), orthogonale à deux sécantes (AB) et (AS) du plan (ABS), est orthogonale à ce plan, donc à toute droite de ce plan, donc à (BS). Ces droites étant sécantes en B, elles sont perpendiculaires. 1 point
2) On a déjà deux triangles rectangles en B : ABC et SBC.
   Les triangles ASC et ASB sont rectangles en A, car la droite (AS), orthogonale à (ABC), est orthogonale à (AB) et (AC). Les quatre faces du tétraèdre SABC sont dont des triangles rectangles. 1 point.
3) (AH) est orthogonale à (SB) par définition. D'autre part, (AH) est incluse dans (ABS), plan orthogonal à (BC) (prouvé dans le 1). (AH) et (BC) sont donc orthogonales, et (AH), orthogonale à deux sécantes de (BSC), est orthogonale à ce plan. 0.5 point.
   D'autre part, H est dans le plan fixe (ABS) (ce plan est défini par la droite Δ fixe et le point fixe B). Le triangle ABH restant rectangle en H, H se déplace sur le cercle de diamètre [AB] du plan (ABS). 1 point.

Figure : 1 point
Total : 4.5 points.

Exercice 3

Beaucoup d'erreurs de calcul dans les dérivées. D'autre part, vous n'avez pas tenu compte des ensembles de définition qui vous étaient donnés. Dans les calculs de limites, les cas d'indétermination ont été en général mal traités. Les justifications étaient souvent insuffisantes .

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0$ car 1 est dans l'ensemble de définition de *f*. 0.25 point

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on a une indétermination $\frac{\infty}{\infty}$.

On peut la traiter de deux méthodes :

a) $\frac{\sqrt{x-1}}{x} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1-\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x}} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) $\frac{\sqrt{x-1}}{x} = \frac{x-1}{x\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{x}\frac{1}{\sqrt{x-1}} = (1-\frac{1}{x})\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x}) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0, \ldots$

1 point (0.5 si « l'infini du haut est meilleur que celui du bas »)

f est dérivable sur]1, +∞[et $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}x - \sqrt{x-1}}{x^2} = \frac{x-2(x-1)}{2x^2\sqrt{x-1}} = \frac{2-x}{2x^2\sqrt{x-1}}$

0.25 pour l'ensemble de dérivabilité, 1 pour la dérivée calculée.

Variations de *f* : *f'* (x) est du signe de $2 - x$, donc *f* est croissante sur [1,2] et croissante sur [2,+∞[. $f(2) = 0.5$. 1 point pour le tableau de variations juste compatible avec une dérivée juste.

$\lim_{x\to -1} g(x) = g(-1) = \sqrt{0} - \sqrt{1} = -1$ car –1 est dans l'ensemble de définition de *g*. 0.25 point

Pour la limite en +∞, on a une indétermination +∞-∞. Le plus simple pour la lever est de factoriser : si x ≠0, on a $g(x) = \sqrt{x}(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{2+\frac{3}{x}})$, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1$, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2+\frac{3}{x}} = \sqrt{2}$,

Comme $1-\sqrt{2} < 0$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. 1 point

g est dérivable sur]-1, +∞ [et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} \\ &= \frac{\sqrt{2x+3} - 2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{2x+3}} \\ &= \frac{2x+3-4(x+1)}{2\sqrt{x+1}\sqrt{2x+3}(\sqrt{2x+3}+2\sqrt{x+1})} \\ &= \frac{-1-2x}{2\sqrt{x+1}\sqrt{2x+3}(\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1})} \end{aligned}$$

0.25 pour l'ensemble, 1 pour la dérivée calculée.

$\lim_{x\to -3^+} x+3 = 0^+$ donc $\lim_{x\to -3^+} \frac{1}{x+3} = +\infty$, donc, comme $\lim_{x\to -3} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{5}$, $\lim_{x\to -3^+} h(x) = +\infty$

De même, $\lim_{x\to 2^-} x-2 = 0^-$ donc $\lim_{x\to 2^-} -\frac{1}{x-2} = +\infty$ et $\lim_{x\to 2^-} h(x) = +\infty$.

Pas d'étude de limite en -3^- et 2^+ à cause de l'ensemble de définition.

0.5 point pour chaque limite.

h est dérivable sur]-3 ;2[et

$$h'(x) = \frac{-1}{(x+3)^2} - \frac{-1}{(x-2)^2} = \frac{(x+3)^2 - (x-2)^2}{(x+3)^2(x-2)^2} = \frac{10x+5}{(x+3)^2(x-2)^2}$$

0.25 pour l'ensemble, 1 pour la dérivée calculée.

Total : 8.25 points

Exercice 4

Le plus mal traité. Dérivons F, on doit obtenir f. On utilise les formules donnant une dérivée de produit, et on a :

F'(x) = acos(2x) + 2axccos(2x) – 2bsin(2x) = 2axcos(2x) + (a-2b)cos(2x).

On identifie à f(x), on doit donc avoir 2a = 1 et a-2b = 0, donc a = $\frac{1}{2}$ et b = $\frac{1}{4}$.

Finalement $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2} x \sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)$

2.5 point.

Presque tous ceux qui ont tenté de traiter cet exercice ont oublié de dériver le produit. Ils ont eu 0.25 point pour prix de leur tentative.

Total général : 21.25.