***Classe de Première $S_1$*** ***Jeudi 30 Mars 2000***

## *Devoir de mathématiques*

## *N°17*

### *Exercice 1) ( 5 points)*

*ABC* est un triangle, on appelle *H* le projeté orthogonal de *A* sur (*BC*), et on construit à l'intérieur un rectangle *MNPQ* avec *M* et *Q* sur (*BC*), *N* sur (*AB*) et *P* sur (*AC*). On considère un tel rectangle, et on appelle $x$ la longueur NP. On note $AH = h$, $BC = a$, $AB = c$. On fera avec profit une figure (mais elle n'est pas comptée dans le barème).

1) Exprimer en fonction de $x$ et de $a$, $c$, $h$ les longueurs *AN*, *BN*, *MN* .

2) En déduire que l'aire de *MNPQ* vaut $A(x) = xh(1-\frac{x}{a})$

3) Etudier les variations de la fonction *A*, et en déduire la valeur de $x$ pour laquelle le rectangle *MNPQ* a une aire maximale. Montrer qu'elle vaut alors la moitié de celle de *ABC*.

### *Exercice 2) (10 points)*

1) On appelle $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 4$.
a) Etudier les variations de $f$.
b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique $a$ sur [2 ; 3]. Donner un encadrement de $a$ d'amplitude $10^{-2}$.
c) Etudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2) On appelle $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $g(x) = \dfrac{x^3 + 3x + 2}{x^2}$
a) Calculer la dérivée $g'$ de $g$ et montrer que $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x^3}$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
b) En déduire les variations de $g$.
c) Montrer que $g(a) = \dfrac{6a-2}{a^2}$ ; en déduire un encadrement de $g(a)$.

3) On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $g$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm. On admettra que la droite $D$ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
a) Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $D$.
b) Déterminer le réel $b$ pour lequel la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $b$ passe par $O$.
c) Tracer $D$, $T$ et $\mathscr{C}$.

### *Exercice 3) (5 points)*

Soit $f$ définie sur [0 ; +∞ [ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

1) Quel est l'ensemble de dérivabilité de $f$ ? Calculer $f'$.

2) Etudier les variations de $f$. En déduire que l'on a toujours sur [0 ; +∞ [l'inégalité :

$$0 \leq \sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}.$$

3) Tracer la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités 1 cm sur ($Ox$), 4 cm sur ($Oy$) ( on admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ).