

Devoir de mathématiques

N°19

Exercice 1) (7 points)

- 1) Soit $P(X) = 2X^2 - X - 1$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(X) = 0$, étudier le signe de $P(X)$.
- 2) On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x) - 2\sin(x)$.
 - a) Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$
 - b) Montrer que $f'(x) = 4\cos^2 x - 2\cos x - 2$.
 - c) Etudier les variations de f sur $[0; \pi]$ en utilisant la question 1)
- 3) Tracer une période de la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité $\frac{\pi}{6}$ cm sur (Ox) , 2cm sur (Oy) .

Exercice 2) (6 points)

Les questions sont indépendantes.

- 1) On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x - 2}$. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, en déduire les asymptotes à sa courbe. Etudier les variations de f et faire son tableau de variations (on ne tracera pas de courbe).
- 2) On définit g sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x}$. Montrer que $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + x}}$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

Exercice 3) (5 points)On appelle (u_n) la suite définie par $u_n = 2^n - n$

- 1) Calculer les quatre premiers termes de la suite.
- 2) Montrer que $u_{n+1} - u_n = 2^n - 1$. En déduire le sens de variation de (u_n) .
- 3) Montrer par récurrence que pour tout n $u_n \geq n$. En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 4) (2 points)

Le jour de son anniversaire de 5 ans, un enfant entendit son grand-père lui tenir ce langage : « Mon enfant, maintenant que te voici parvenu à un âge respectable, je t'offre ce billet de 100F. Prends-en soin et sache que si tu es sage, je t'offrirai à chacun de tes anniversaires 50F de plus qu'au précédent, et ce jusqu'au jour de ta majorité. » Plein de gratitude, ce charmant bambin rangea le billet dans une tirelire spéciale, et resta sage. Son grand-père tint sa promesse, et chaque année le cadeau alla rejoindre les précédents. Combien notre héros avait-il dans sa tirelire le jour de sa majorité ? On justifiera sa réponse, et on convertira bien évidemment en euros (1€ = 6,55957F) (non, je plaisante).