

Devoir de mathématiques

N°10

Exercice 1) (10.5 points)

On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x}$, et \mathcal{C} sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (on ne cherchera pas à tracer \mathcal{C})

1) Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de \mathcal{C} .

2) a) Montrer que, pour tout x différent de -2 et 0 , $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2 - 1}$.

b) En déduire que l'on a $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4$, où f_1, f_2, f_3, f_4 sont 4 fonctions élémentaires que l'on précisera.

c) En déduire le tableau de variation de f .

3) Montrer que f est bornée sur $[1; +\infty[$. Est-elle bornée sur $]0; +\infty[$?

4) Donner l'expression et l'ensemble de définition de la fonction f' définie par $f' = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$

Exercice 2) (9.5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2cm. On appelle f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 4x + 3$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $g(x) = \frac{x-1}{x-3}$, et on appellera \mathcal{P} et \mathcal{H} leurs courbes respectives.

1) a) Mettre f sous forme canonique.

b) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout x différent de 3 , on ait $g(x) = a + \frac{b}{x-3}$.

2) Déduire des résultats précédents le tracé de \mathcal{H} et \mathcal{P} (on justifiera avec soin)

3) Montrer que l'équation $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ est équivalente à $f(x) = g(x)$. En déduire la résolution graphique de cette équation.

4) Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

