Classe de Première S$_5$ **Lundi 15 Février 1999**

Devoir de mathématiques

N°14

Exercice 1) (8 points)

On appelle f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = x^3 - 3x + 3$, et C sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on ne cherchera pas à tracer C).

1) Montrer que le point I de C d'abscisse 0 est un centre de symétrie de C. Préciser les coordonnées de I

2) Montrer que, pour tous réels x et y on a $f(y) - f(x) = (y - x)(x^2 + xy + y^2 - 3)$.

En déduire que f est décroissante sur [0;1] et croissante sur [1;+∞ [.

Donner le tableau de variation de f sur ℝ.

3) Montrer que, si $x \geq 2$ alors $f(x) \geq x$ (on pourra remarquer que $x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$).

f est-elle bornée sur ℝ?

4) Expliquer comment on obtiendrait à partir de C la courbe de la fonction g définie sur ℝ par $g(x) = f(|x|)$

4) Montrer que la fonction h, définie sur [0, +∞[par $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ est bornée sur [0, +∞[.

Exercice 2) (7 points)

On appelle f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = x^2 + 6x + 6$ et g la fonction définie sur ℝ\{-2} par $g(x) = \dfrac{-x}{x+2}$, on notera P et H leurs courbes respectives dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm.

1) Mettre f sous forme canonique. En déduire que P s'obtient à l'aide de la parabole d'équation $y = x^2$ par une transformation que l'on précisera. Tracer P.

2) Déterminer deux réels a et b tels que l'on ait, pour tout x de ℝ\{-2}, $g(x) = a + \dfrac{b}{x+2}$. En déduire le tracé de H (dans le même repère que P).

3) Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$.

4) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

Exercice 3) (5 points)

On appelle la fonction définie sur ℝ\{-2 ; 2}par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

1) Montrer que f est paire. Exprimer f comme composée de fonctions élémentaires. En déduire le tableau de variation de f sur [0 ; 2 [et sur]2 ; +∞[, puis sur ℝ\{-2 ; 2}.

2) En déduire le tableau de variation de la fonction g définie sur ℝ\{-2 ; 2}par $g(x) = (f(x))^2$