Classe de première S_7

Corrigé du devoir de mathématiques

N°2

Exercice 1

1) *f* est définie sur ℝ par $f(x)=x^2+3$. Elle est décroissante sur]-∞ ; 0] et croissante sur [0 ; +∞[comme la fonction carré.

   g est définie sur ℝ - {0} par $g(x)=\frac{1}{x}$. Elle est décroissante sur]-∞ ; 0[et sur]0 ; +∞[.

   h est définie sur ℝ par $h(x)=3x-5$. Elle est croissante sur ℝ.
2) *f* + *g* est définie sur ℝ - {0} (intersection des ensembles de définition de *f* et *g*) par $(f+g)(x)=x^2+\frac{1}{x}+3$.

   $g\circ f$ est définie sur ℝ (en effet, *f* est définie sur ℝ et pour tout réel *x*, $f(x)\neq 0$ donc $f(x)\in D_g$) par $(g\circ f)(x)=g\left[f(x)\right]=\frac{1}{x^2+3}$.

   $f\times h$ est définie sur ℝ (comme *f* et *h*) par $(f\times h)(x)=(x^2+3)(3x-5)$
3) On peut conclure sur le sens de variation de *f* + *g* sur un intervalle où *f* et *g* ont le même sens de variation, donc on peut dire que *f* + *g* est décroissante sur]-∞ ; 0[.

   f est décroissante de]-∞ ; 0] vers [3 ; +∞[et *g* est décroissante de [3 ; +∞[vers $]0;\frac{1}{3}]$ donc $g\circ f$ est croissante de]-∞ ; 0] vers $]0;\frac{1}{3}]$. De même, $g\circ f$ est décroissante de [0 ; +∞[vers $]0;\frac{1}{3}]$.

   On peut conclure sur le sens de variation de $f\times h$ sur un intervalle où ces deux fonctions sont positives et ont même sens de variation, on peut donc dire que $f\times h$ est croissante sur $[\frac{5}{3};+\infty[$.

Exercice 2)

On appelle *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$.

1) Soient *a* et *b* deux réels de]-∞ ; 2].

   $$f(a)-f(b)=\frac{2a+3}{a-2}-\frac{2b+3}{b-2}=\frac{(2a+3)(b-2)-(2b+3)(a-2)}{(a-2)(b-2)}=\frac{7b-7a}{(a-2)(b-2)}.$$

   a – 2 et *b* – 2 sont tous deux négatifs, donc leur produit est positif et *f* (*a*) – *f* (*b*) est du signe de *b* – *a*, donc *f* est décroissante sur]-∞ ; 2[. On obtient le même résultat sur]2 ; +∞[car cette fois *a* – 2 et *b* – 2 sont tous deux positifs.
2) On peut faire un tableau de signes, et on obtient que *f* est négative sur $\left[-\frac{3}{2};2\right[$, positive sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ et]2 ; +∞[. *f* s'annule en $-\frac{3}{2}$.

3) On met au même dénominateur : $a+\frac{b}{x-2}=\frac{a(x-2)+b}{x-2}=\frac{ax+b-2a}{x-2}$. En identifiant à $f(x)$, on obtient $\begin{cases} a=2 \\ b-2a=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=7 \end{cases}$ et $f(x)=2+\frac{7}{x-2}$.

4) On a $x \xrightarrow{f_1} x-2 \xrightarrow{f_2} \frac{1}{x-2} \xrightarrow{f_3} 2+\frac{7}{x-2}$. Par conséquent, en posant $f_1 : x \to x-2$, $f_2 : x \to \frac{1}{x}$, $f_3 : x \to 2+7x$, on a $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

5) On a $g(x)=f(x)^2$ donc $g = h \circ f$ avec $h : x \to x^2$. On sait que h décroît sur]-∞ ; 0] et croît sur [0 ; +∞[. On sait d'autre part que f est décroissante de $\left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right]$ vers [0 ; 2[, décroissante de $\left[-\frac{3}{2} ; 2\right[$ vers]-∞ ; 0] et décroissante de]2 ; +∞[vers]2 ; +∞[. D'après le théorème sur le sens de variation d'une fonction composée, g est décroissante de $\left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right]$ vers [0 ; 4[, croissante de $\left[-\frac{3}{2} ; 2\right[$ vers [0 ; +∞[et décroissante de]2 ; +∞[vers]4 : +∞[.

Exercice 3

1) Développons $(x+2)^2+1 = x^2+4x+4+1 = x^2+4x+5 = f(x)$. On a donc bien, pour tout réel x, $f(x)=(x+2)^2+1$.
2) Comme un carré est toujours positif, on a pour tout réel x : $(x+2)^2 \geq 0$, et donc $f(x) \geq 1$. Par conséquent, f ne s'annule jamais, et g est définie sur $\mathbb{R}$.
3) On a, pour tout réel x, $f(x) \geq 1$. Comme la fonction inverse est décroissante sur [1 ; +∞[et que l'inverse d'un réel strictement positif est strictement positif, on a pour tout réel x : $0 < \frac{1}{f(x)} \leq 1$.
4) On peut écrire $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$, avec $f_3(x)=x+2$, $f_2(x)=x^2$ et $f_1(x)=x+1$. f_1 et f_3 sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, et f_2 est croissante sur [0 ; +∞[, décroissante sur]–∞ ; 0]. En appliquant le théorème du sens de variation d'une fonction composée, et compte tenu que $f_3(x)$ est positif sur [–2 ; +∞[et négatif sur]–∞ ; –2], on a pour f le tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Comme g est la composée de f et de la fonction inverse, strictement décroissante sur [1 ; +∞[, on a pour g le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

5) D'après le tableau de variations de f, l'équation $f(x) = a$ a deux solutions si $a > 1$, une solution unique si $a = 1$, et pas de solution si $a < 1$.