

Classe de première S₇

Dernier

Devoir surveillé de

Mathématiques

Exercice 1) (8 points)

On veut prouver que les rayons parallèles à l'axe d'une parabole se réfléchissent en passant par un point fixe, le foyer de cette parabole. On se donne donc dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) la parabole P d'équation $y = x^2$, et A le point de P d'abscisse a (a est un réel donné).

- 1) Montrer que la tangente T en A à P a pour équation $y = 2ax - a^2$. En déduire que le vecteur $\vec{n}(-2a, 1)$ est perpendiculaire à T .
- 2) Un rayon parallèle à (Oy) se réfléchit en A sur P de façon que l'angle avec \vec{n} du rayon incident soit égal avec l'angle du vecteur réfléchi. On cherche donc un vecteur \vec{u} de norme 1 tel que $(\vec{j}, \vec{n}) = (\vec{n}, \vec{u})$. Montrer que cette condition entraîne $\vec{j} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{u}$ (1).
- 3) On pose $\vec{u}(x, y)$. Montrer l'on a $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ -2ax + y = 1 \end{cases}$. Résoudre ce système.
- 4) Montrer que la droite de vecteur directeur $\vec{u}\left(\frac{-4a}{1+4a^2}, \frac{1-4a^2}{1+4a^2}\right)$ et passant par A a pour équation $y = \frac{4a^2 - 1}{4a}x + \frac{1}{4}$. Conclure.

Exercice 2) (8 points)

On définit une suite (u_n) par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1 \end{cases}$$

- 1) Calculer u_1, u_2, u_3 . La suite (u_n) est-elle croissante ou décroissante?
- 2) On pose $v_n = u_n - 4n + 10$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3 .
- 3) Montrer que la suite (v_n) est géométrique, en préciser la raison.
- 4) En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
- 5) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- 6) Quelle est la limite de (u_n) ?
- 7) On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Donner l'expression de S_n en fonction de n .

Exercice 3 (4 points)

On forme 3 carrés accolés $ABCD, BEFC, EGHF$ (les points A, B, E, G sont alignés, de même que D, C, F, H).

Montrer que $\widehat{HAB} + \widehat{HBE} = \widehat{HEG}$.

Dans cet exercice, vous êtes libre de choisir la méthode à mettre en œuvre. Indiquez les tentatives, même infructueuses. La pertinence des méthodes envisagées, les tentatives de résolution ainsi que les solutions partielles seront prises en compte dans l'évaluation.