Classe de première S_5 ***Vendredi 28 septembre 2001***

Devoir de mathématiques

N°2

Exercice 1) (7 points)

On appelle *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

1) Montrer que $f(x)$ peut se factoriser par $(x - 1)$ et donner le quotient. En déduire l'étude du signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel *x*.
2) Montrer que pour tout *x*, on a $f(x) = (x-2)^2 - 1$. En déduire que *f* est croissante sur [2 ; +∞[et décroissante sur]-∞ ; 2].
3) Déduire des questions précédentes le sens de variation sur ℝ de la fonction *g* définie par $g(x) = \left(f(x)\right)^2$

Exercice 2) (5 points)

1) Déterminer les réels *a* et *b* pour que le polynôme *P* défini par $P(x) = 8x^3 + ax^2 + bx - 30$ admette -2 et -5 pour racines (on exprimera *P* (-2) et *P* (-5) en fonction de *a* et *b*)
2) Montrer qu'alors $P(x)$ peut se factoriser par $x^2 + 7x + 10$.
3) Résoudre dans ℝ l'équation $8x^3 + 53x^2 + 59x - 30 = 0$

Exercice 3) (8 points)

On appelle *f* la fonction définie sur]0, +∞[par $f(x) = x^2 + x - \dfrac{2}{x}$.

1) Montrer que *f* est strictement croissante.
2) Montrer que l'on peut écrire, pour tout *x* de]0, +∞[, $f(x) = \dfrac{(x-1)P(x)}{x}$, où *P* est un polynôme que l'on précisera.
3) Montrer que l'on a, pour tout réel *x*, $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$. En déduire que, pour tout *x*, $x^2 + 2x + 2$ est supérieur à 1, puis que pour tout *x* de]0 ; 1], $f(x) \leq 1 - \dfrac{1}{x}$.

   En déduire un réel *a* tel que l'on ait, pour tout *x* de]0 ; a], $f(x) \leq -10^6$
4) Montrer que, pour tout *x* supérieur à 2, $x - \dfrac{2}{x} \geq 1$. En déduire que, sur [2 ; +∞[, $f(x) \geq x^2$.

   En déduire un réel *b* tel que l'on ait, pour tout *x* de [*b* ; +∞[, $f(x) \geq 10^{10}$.