Classe de Première S_5
Corrigé du Devoir n°2

Exercice 1)

1) Par division on obtient $f(x)=(x-1)(x-3)$. A l'aide d'un tableau de signes, on trouve que $f(x)$ est positif sur]-∞ ; 1] et [3 ; +∞[, nul en 1 et 3, négatif sur [1 ; 3].
2) En développant, on obtient $(x-2)^2-1=x^2-4x+4-1=f(x), cqfd$.
   On peut étudier les variations de f de deux manières :
   Soient a et b deux réels de]-∞ ; 2], avec $a \leqslant b \leqslant 2$. On a donc $a-2 \leqslant b-2 \leqslant 0$, donc $(a-2)^2 \geqslant (b-2)^2$ car la fonction carré est décroissante sur]-∞ ; 0], donc $f(a) \geqslant f(b)$ et f est décroissante sur]-∞ ; 2]. On montre de même que f est croissante sur [2 ; +∞[.
   ou bien
   On a $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ avec $f_1 : x \to x-2;\ f_2 : x \to x^2;\ f_3 : x \to x-1$. f_1 est croissante de]-∞ ; 2] vers]-∞ ; 0], f_2 est décroissante de]-∞ ; 0] vers [0 ; +∞[, f_3 est croissante sur ℝ. Par composition, f est décroissante sur]-∞ ; 2]. On montre de même que f est croissante sur [2 ; +∞[.
3) g est la composée de f et de la fonction carré, qui est décroissante sur]-∞ ; 0] et croissante sur [0 ; +∞[. Il en résulte que g aura le même sens de variation que f quand f sera positive, le sens de variation contraire quand f sera négative.
   f est décroissante de]-∞ ; 1] vers [0 ; +∞[, la fonction carré est croissante sur [0 ; +∞[, donc g est décroissante sur]-∞ ; 1].
   De même, f est décroissante de [1 ; 2] vers [-1 ; 0], donc g est croissante sur [1 ; 2]
   De même, f est croissante de [2 ; 3] vers [-1 ; 0], donc g est décroissante sur [2 ; 3]
   De même, f est croissante de [3 ; +∞[vers [0 ; +∞[donc g est croissante sur [3 ; +∞[.

Exercice 2

1) $P(-2)=8\times(-2)^3+a(-2)^2+b(-2)-30=-94+4a-2b$
   $P(-5)=8\times(-5)^3+a(-5)^2+b(-5)-30=-1030+25a-5b$
   P admet –2 et –5 pour racines si et ssi $P(-2) = 0$ et $P(-5) = 0$. On obtient le système :
   $\begin{cases}4a-2b=94\\25a-5b=1030\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a-b=47\\5a-b=206\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}L_1 : 2a-b=47\\L_2-L_1 : 3a=206-47=159\end{cases}$. On obtient que $a = 53$ et $b = 59$, et $P(x)=8x^3+53x^2+59x-30$
2) Par division, on obtient que $P(x)=(x^2+7x+10)(8x-3)$
3) On remarque que $(x+2)(x+5)=x^2+2x+5x+10=x^2+7x+10$. On en déduit que l'on a $P(x)=(x+2)(x+5)(8x-3)$, les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont donc –2, -5 et $\frac{3}{8}$.

Exercice 3)

1) Les fonctions $x \to x^2$ et $x \to x$ sont strictement croissantes sur]0 ; +∞[. La fonction $x \to \frac{1}{x}$ y est strictement décroissante, donc la fonction $x \to \frac{-2}{x}$ est strictement croissante sur]0 ; +∞[. f, somme de trois fonctions strictement croissantes, est strictement croissante sur]0 ; +∞[.

2) On a $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-2}{x}$. Factorisons le polynôme x^3+x^2-2 par $x-1$, on obtient que $x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2)$. On a bien prouvé que $f(x)=\dfrac{(x-1)(x^2+2x+2)}{x}$.

3) En développant , on obtient $(x+1)^2+1=x^2+2x+1+1=x^2+2x+2, cqfd$. Comme un carré est toujours supérieur à 0, on en déduit que $(x + 1)^2 + 1$ est toujours supérieur à 1, donc que $x^2 + 2x + 2$ est toujours supérieur à 1. En multipliant cette inégalité par $\dfrac{x-1}{x}$ qui est négatif sur]0 ; 1], on l'inverse. On obtient donc que sur]0 ; 1] $f(x)\leqslant\dfrac{x-1}{x}$, c'est à dire $f(x)\leqslant 1-\dfrac{1}{x}$.

   Pour avoir $f(x)\leq -10^6$, il suffit d'avoir $1-\dfrac{1}{x}\leq -10^6$, donc $\dfrac{1}{x}\geq 1+10^6$, donc $x\leq\dfrac{1}{1+10^6}$ car la fonction inverse est décroissante sur]0 ; +∞[. On en conclut que pour tout x de $]0;\dfrac{1}{1+10^6}]$ on a $f(x)\leq -10^6$.

4) Si $x \geqslant 2$, alors $\dfrac{1}{x}\leq\dfrac{1}{2}$ car la fonction inverse est décroissante sur]0 ; +∞[, donc $\dfrac{-2}{x}\geq -1$ (on multiplie l'inégalité précédente par le réel négatif –2). On a deux inégalités de même sens, on peut les ajouter et on trouve que si $x\geq 2$ alors $x-\dfrac{2}{x}\geq 1$. On a donc que pour tout x de [2 ; +∞[, $x^2+x-\dfrac{2}{x}\geq x^2+1$, donc à plus forte raison $x^2+x-\dfrac{2}{x}\geq x^2$.

   Pour avoir $f(x)\geq 10^{10}$, il suffit d'avoir $x^2\geq 10^{10}$ donc $x\geq 10^5$ car la fonction carré est croissante sur]0 ; +∞[. On en conclut que pour tout x de $\left[10^2;+\infty\right[$, $f(x)\geq 10^{10}$