Classe de première S₇

Corrigé du devoir surveillé n°4

Exercice 1)

1) On développe : $P(x)=(x-2)(x+5)=x^2+5x-2x-10=x^2+3x-10$

L'équation $P(x)=0$ est équivalent à $x-2=0$ ou $x+5=0$, elle a pour solution {-5 ; 2}

Pour étudier le signe de $P(x)$, on fait un tableau

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	+	
$x+5$		$-$	0	+		+	
$P(x)$		+	0	$-$	0	+	

2) Q admet -5 et 2 pour racines si et seulement si $Q(-5)$ et $Q(2)$ sont nuls.

On calcule : $Q(2)=7\times2^3+a\times2^2+b\times2+30=4a+2b+86$

et $Q(-5)=7\times(-5)^3+a\times(-5)^2+b\times(-5)+30=25a-5b-845$

On obtient le système :

$$\begin{cases}4a+2b=-86\\25a-5b=845\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=-43\\5a-b=169\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}L_1:2a+b=-43\\L_1+L_2:7a=126\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=18\\b=-43-2a=-79\end{cases}$$

On a donc $Q(x)=7x^3+18x^2-79x+30$.

3) Par division, on trouve $Q(x)=(x^2+3x-10)(7x-3)=(7x-3)P(x)$

4) Il n'y a plus qu'à faire un tableau de signe, celui de $P(x)$ ayant été étudié au 1)

x	$-\infty$		-5		$\frac{3}{7}$		2		$+\infty$
$7x-3$		$-$		$-$	0	+		+	
$P(x)$		+	0	$-$		$-$	0	+	
$Q(x)$		$-$	0	+	0	$-$	0	+	

La solution de l'inéquation $Q(x)<0$ est donc $\left]-\infty;-5\right[\cup\left]\frac{3}{7};2\right[$

Exercice 2)

1) On développe : $(x+1)^2-8=x^2+2x+1-8=x^2+2x-7$. On obtient bien $f(x)$.

f est une fonction associée à la fonction carré. Sa courbe s'obtient donc par translation de celle cette dernière d'un vecteur (-1 ; -8)

Le tableau de variation de f est celui de la fonction carré, seul le sommet change :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-8	↗	$+\infty$

2) Les antécédents de 0 sont les solutions de $f(x)=0$. Résolvons :

$$f(x)=0\Leftrightarrow(x+1)^2-8=0\Leftrightarrow(x+1)^2=8\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=\sqrt{8}\\\text{ou}\\x+1=-\sqrt{8}\end{cases}.$$

Les antécédents de 0 sont donc $-1+2\sqrt{2}$ et $-1-2\sqrt{2}$

3) Laissé au lecteur

4) Les abscisses des points d'intersection de *P* et *H* sont solution de l'équation $f(x) = g(x)$. Ecrivons la : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 7 = -\frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}{x} = 0$. Une fraction est nulle si et ssi son numérateur est nul. L'équation recherchée est donc $x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = 0$

5) Par division, on obtient $x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = (x+4)(x^2 - 2x + 1) = (x+4)(x-1)^2$.
Les abscisses des points d'intersection de *P* et *H* sont donc –4 et 1, solutions de l'équation précédente. Leurs ordonnées sont les images de –4 et 1 par *f* (ou par *g*), on obtient les points (–4 ; 1) et (1 ; –4).
L'écart entre *f* et *g* vaut $f(x) - g(x) = x^2 + 2x - 7 + \frac{4}{x} = \frac{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}{x} = \frac{(x+4)(x-1)^2}{x}$.
P est au dessus de *H* quand cet écart est positif, en dessous quand il est négatif. On fait un ultime tableau de signe, et on obtient que *P* est au dessus de *H* sur]-∞ ; -4] et sur]0 ; +∞[.

6) $\varphi_1 = |f - g|$. C'est l'écart entre *f* et *g*. On représente, pour chaque abscisse *x*, la longueur entre les points de *P* et *H* de même abscisse.
$\varphi_2 = \frac{1}{2}(f + g)$. C'est la moyenne entre *f* et *g* ; On représente donc, pour chaque abscisse *x*, le milieu des points de *P* et *H* de même abscisse.

Exercice 3)

1) On se place dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$. Les formules de changement de repère sont $\begin{cases} x = -1 + X \\ y = 20 + Y \end{cases}$, (*x* ; *y*) étant les coordonnées dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (*X* ; *Y*) dans $(I, \vec{i}, \vec{j})$.
C a pour équation $y = f(x)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On obtient donc dans $(I, \vec{i}, \vec{j})$:
$$Y + 20 = (-1 + X)^3 + 3(-1 + X) - 18(-1 + X)$$
$$= -1 + 3X - 3X^2 + X^3 + 3(1 - 2X + X^2) + 18 - 18X$$
$$Y + 20 = X^3 - 21X + 20$$
Ce qui équivaut à $Y = X^3 - 21X$. La fonction $X \rightarrow X^3 - 21X$ est impaire, donc *I* est centre de symétrie de *C*.

2) Par division on obtient $f(x) = (x-3)(x^2 + 6x) = x(x-3)(x+6)$. Les antécédents de 0 sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$, ce sont –6, 0 et 3.

3) On développe et ça marche.

4) Sur [3 ; +∞[, *f* est le produit des trois fonctions affines croissantes et positives *x*, *x* – 3 et *x* + 6. Elle est donc croissante.

5) Le symétrique par rapport à –1 de l'intervalle [3 ; +∞[est]-∞ ; 5]. *f* est croissante sur [3 ; +∞[, sa courbe admet un centre de symétrie, donc le sens de variation de *f* est le même sur]–∞ ; 5]. *f* est donc croissante sur]–∞ ; 5]