Classe de première S_5

Corrigé du DS 16 (probabilités – suites)

Exercice 1)

75% des clients ont plus de 20 ans, et parmi eux 80% ont la phrase 1. Il y a donc 0.75×0.8, c'est à dire 60% des clients qui ont plus de 20 ans et ne se font pas insulter. De même on trouve que 10% ($0.25\times0.4 = 0.1$) des clients ont moins de 20 ans et ne se font pas insulter, et le reste s'obtient par somme et différence.

Finalement on a

	Phrase 1	Phrase 2	Total
Plus de 20 ans	60%	15%	75%
Moins de 20 ans	10%	15%	25%
Total	70%	30%	100%

Un client se fait insulter : il sont 30% dans ce cas, et parmi eux 15% ont plus de 20 ans. La probabilité qu'un client qui se fait insulter ait plus de 20 ans est donc de 50%

Probabilité que le vigile se retrouve à l'infirmerie :

On sait déjà que le client a un sac et moins de 20 ans. Il faut que les événements suivants se réalisent successivement :

Le client se fait insulter (60 chances sur 100, car il a moins de 20 ans)

Il répond (1 chance sur 2)

La discussion s'envenime (1 chance sur 10)

Le vigile perd (1 chance sur 100)

La probabilité cherchée est le produit des précédentes et vaut donc

$$p(\text{"le vigile à l'infirmerie"}) = \frac{60}{100}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{100} = \frac{3}{10000}$$

Exercice 2)

Le plus simple était de représenter sous forme d'un tableau

Réponses justes	5	4	4	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0
Réponses fausses	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2-5	
Abstentions	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0	4	3		
Note (= 2J – F)	10	8	7	6	5	4	4	3	2	1	2	1	0	0

On peut donc avoir les notes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10.

Pour prendre 3 objets parmi 5, on a 5 choix pour le premier, 4 choix pour le second et 3 choix pour le troisième, ce qui fait 60 choix ($5\times4\times3$) en tout ; comme on ne tient pas compte de l'ordre, et qu'il y a 3! = 6 manières de ranger ces 3 objets, il y a en tout 10 manières de choisir 3 objets parmi 5. En choisir 2, c'est choisir les 3 qu'on rejette, il y a donc aussi 10 manières.

Le candidat ne connaissant rien aux questions posées, il répond au hasard, et a donc, pour chaque questions, une probabilité égale à $\frac{1}{3}$ d'avoir une réponse exacte, et $\frac{2}{3}$ d'avoir une réponse fausse. Il répond à toutes les questions, donc il peut avoir les notes 0, 1, 4, 7, 10 (on prend dans le tableau les notes pour lesquelles il n'y a pas d'abstention).

Probabilité qu'il ait au moins une réponse exacte : cherchons la probabilité contraire, celle qu'il n'ait aucune réponse exacte. Pour chaque question, il a une probabilité égale à $\frac{2}{3}$ de se tromper, et il répond à 5 questions. La probabilité que tout soit faux vaut donc $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$.

La probabilité qu'il ait au moins une réponse exacte est donc $1 - \frac{32}{243} = \frac{211}{243}$

X est la variable aléatoire égale à sa note.

X est égal à 10 quand les 5 réponses sont exactes, et comme chacune à une probabilité $\frac{1}{3}$ de l'être, on obtient $p(X = 10) = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$

X vaut 7 quand il y a 4 réponses exactes. Il y a 5 manières de choisir quelle réponse sera fausse, une réponse fausse a une probabilité de $\frac{2}{3}$ et une réponse exacte de $\frac{1}{3}$. On obtient donc $p(X = 7) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \frac{2}{3} \times 5 = \frac{10}{243}$

X vaut 4 quand il y a 3 réponses exactes et 2 réponses fausses. On a vu qu'il y a 10 manières de choisir les deux réponses qui seront fausses (c'est la question 2). On a donc

$p(X = 4) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 10 = \frac{40}{243}$

De même $p(X = 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 10 = \frac{80}{243}$.

On obtient p(X = 0) par soustraction : $p(X = 0) = 1 - \frac{1}{243} - \frac{10}{243} - \frac{40}{243} - \frac{80}{243} = \frac{112}{243}$.

Quand le candidat a une probabilité égale à $\frac{2}{3}$ de connaître la réponse à une question, et qu'il ne répond qu'aux questions dont il connaît la réponse, il n'a que des réponses justes et des abstentions. Sa note peut donc valoir 0, 2, 4, 6, 8 ou 10

Pour des raisons identiques, on obtient

$p(Y = 10) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$

$p(Y = 8) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \frac{1}{3} \times 5 = \frac{80}{243}$ (il y a 5 possibilités pour la question sans réponse)

$p(Y = 6) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 10 = \frac{80}{243}$ (il y a 10 possibilités pour le choix des 2 questions sans réponse parmi les 5 questions)

$p(Y = 4) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 10 = \frac{40}{243}$ pour les mêmes raisons

$p(Y = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \frac{2}{3} \times 5 = \frac{10}{243}$ et $p(Y = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$

L'espérance de Y se calcule et on trouve $E(Y)=\frac{20}{3}$. C'est la note que le candidat s'attend en moyenne à obtenir. (c'est logique, quand on connaît les 2 tiers des questions, on a les deux tiers des points)

Le calcul pour la variance donne $V(Y)=\frac{40}{9}$

La probabilité que le premier candidat ait au moins la moyenne est la somme des probabilités qu'il ait 7 ou 10 (les événements X = 7 et X = 10 sont incompatibles). Elle vaut $\frac{11}{243}$. De même, la probabilité que le second candidat ait la moyenne est $\frac{192}{243}$.

Exercice 3)

On définit une suite (u_n) par $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n+\frac{1+u_n}{1+2u_n}$

On a donc $u_1=\frac{5}{3}$, $u_1=\frac{89}{39}$, $u_3=\frac{24305}{8463}$, $u_4=\frac{1664474849}{48300799}$.

Pour montrer que (u_n) est croissante à termes positifs, il faut être un peu rigoureux :

Montrons par récurrence que $u_n \geqslant 0$.

<u>Initialisation</u> : $u_0 = 1$ est bien positif.

<u>Hérédité</u> : Si pour un certain n, u_n est positif, alors $1 + u_n$ et $1 + 2\,u_n$ le sont aussi, donc leur quotient l'est aussi, et u_{n+1}, somme de nombres positifs, est positif.

La propriété $u_n \geqslant 0$, vraie pour $n = 0$ et héréditaire, est vraie pour tout entier n.

Comme pour tout n on a $u_n \geqslant 0$, on en déduit que pour tout n, $1 + u_n$ et $1 + 2\,u_n$ le sont aussi, donc leur quotient est positif. Comme $u_{n+1}-u_n=\frac{1+u_n}{1+2u_n}$ est positif, (u_n) est croissante.

Pour montrer que $u_{n+1} > u_n + ½$, il suffit de prouver que $u_{n+1}-u_n=\frac{1+u_n}{1+2u_n}$ est toujours supérieur à ½. Calculons la différence $\frac{1+u_n}{1+2u_n}-\frac{1}{2}=\frac{2(1+u_n)-(1+2u_n)}{2(1+2u_n)}=\frac{1}{2(1+2u_n)}$. Comme on a vu que u_n est toujours positif, $\frac{1+u_n}{1+2u_n}-\frac{1}{2}$ est toujours positif, on a donc bien pour tout n $u_{n+1}-u_n>\frac{1}{2}$ donc $u_{n+1}>u_n+\frac{1}{2}$.

Montrons maintenant par récurrence que $u_n \geq 1+\frac{n}{2}$

<u>Initialisation</u> : $u_0=1\geq 1+\frac{0}{2}$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : supposons que pour un certain entier n on ait $u_n \geq 1+\frac{n}{2}$. On sait que $u_{n+1}>u_n+\frac{1}{2}$, donc $u_{n+1}\geq 1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}$, c'est à dire $u_{n+1}\geq 1+\frac{n+1}{2}$.

La propriété $u_n \geq 1+\frac{n}{2}$, vraie pour $n = 0$ et héréditaire, est vraie pour tout entier n.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{n}{2}=+\infty$, la suite (u_n) tend vers $+\infty$ par comparaison.