

Devoir de mathématiques

N°8

Exercice 1) (7 points)

A, B et C sont trois points tels que $AB = 5$, $AC = 8$, et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$

- Faire une figure que l'on complétera par la suite.
- Quelle est la valeur de \widehat{BAC} ?
- En écrivant $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ puis en élevant au carré, calculez BC .
- Déterminer l'ensemble \mathcal{D} des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Soit I le milieu de $[BC]$. Montrer que, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = MI^2 - \frac{BC^2}{4}$.
- En déduire l'ensemble \mathcal{E} des points M du plan tels que $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 20$

Exercice 2) (6 points)

\mathcal{C} est un cercle de centre O et de rayon r . On place sur \mathcal{C} quatre points A, A', B, B' tels que les droites (AA') et (BB') soient orthogonales, et on appelle I leur point d'intersection.

On appelle A'' le point de \mathcal{C} diamétralement opposé à A .

- Faire une figure
- Montrer que $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IA''} = IO^2 - r^2$
- En déduire la valeur de $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IA'}$. Combien vaut $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IB'}$?
- Calculer $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{A'B'}$. En déduire que la médiane issue de I du triangle IAB est aussi une hauteur du triangle $IA'B'$.

Exercice 3) (7 points)

ABC est un triangle de côtés respectifs $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. On appelle A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, G est le centre de gravité.

- Faire une figure
- Calculer en fonction de a, b et c les longueurs AA'^2, BB'^2, CC'^2 (on utilisera le théorème de la médiane sans justification).
- En déduire que la somme $GA^2 + GB^2 + GC^2$ vaut $\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$
- Si M est un point du plan, montrer que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.
- En déduire l'ensemble des points M du plan vérifiant $MA^2 + MB^2 + MC^2 = b^2 + c^2$.